

Modèle poissoniens et processus Markoviens

Partie 2: Modèles poissoniens

Master 2 MMA
Université de Paris, UFR Maths-Info, Campus Saint-Germain

Raphael Lachieze-Rey¹

9 février 2024

1. raphael.lachieze-rey@parisdescartes.fr

Table des matières

1	Construction des processus de Poisson	5
1.1	Processus binomial	6
1.2	Processus ponctuels	8
1.3	Fonctionnelle de capacité	9
1.4	Processus de Poisson	9
1.5	Lien avec le processus de Poisson temporel	11
1.6	Construction sur une mesure localement finie	12
1.7	Activité pratique : séismes	14
1.8	Autres propriétés	15
1.8.1	Stationarité	15
1.8.2	Réalisations typiques	16
1.9	Activité : Simulation d'un Processus non-homogène par thinning	18
1.10	TD1 : Processus de Poisson	19
1.11	Convergence et construction alternative	21
1.12	TD : Topologie et mesurabilité	23
2	Processus de Poisson marqué	25
2.1	Exemples	26
2.1.1	Processus de Poisson composé	27
2.2	Activité : Processus de naissance et mort	27
2.3	Modèle booléen	28
2.3.1	Activité : Modèle booléen et visibilité	28
2.4	Définition	29
2.5	Isotropie	34
2.6	Fraction de volume	34
2.7	TD3	35
3	Champs shot noise	37
3.1	Intégrale stochastique	37
3.2	Modèle shot-noise	41
3.3	Limite gaussienne	43

Biblio

- Processus ponctuels : Daley, Vere-Jones, *An introduction to the theory of Point processes*, Springer
- Processus ponctuels, orienté “statistiques spatiales” : Stoyan, Kendall, Mecke, *Stochastic geometry and its applications*
- Processus ponctuels, orienté “applications en télécommunications” : François Baccelli, Bartłomiej Błaszczyszyn, *Stochastic Geometry and wireless networks*

- Fermés aléatoires : Ilya Molchanov, *The theory of random closed sets*
- Statistiques des processus ponctuels : Peter J. Diggle, *Statistical Analysis of Spatial and Spatio-Temporal Point Patterns*

Chapitre 1

Construction des processus de Poisson

L'idée est de simuler un ensemble aléatoire de points dans un large domaine, de telle sorte à ce que les points tombent "indépendamment" les uns des autres.

Ce type d'objets mathématique peut modéliser de nombreux phénomènes spatiaux :

- Utilisateur d'un réseau de téléphones mobiles
- Antennes d'un réseau
- Données récoltées d'une manière inconnue
- ...

On va ensuite construire des objets mathématiques plus élaborés sur cet ensemble de points aléatoires :

- Modèle booléen
- Processus de droites
- Processus shot-noise

Nous allons tout d'abord étudier le processus binomial, ensemble de n points iid et uniformément répartis dans un large domaine.

Le processus binomial est souvent choisi par les praticiens car c'est un objet probabiliste plus facile à appréhender, mais les processus de Poisson sont plus à même de représenter l'indépendance spatiale, et plus faciles à manipuler mathématiquement. On va donc dans un second temps introduire le processus de Poisson, qui peut être vu comme la limite du processus binomial quand le nombre de points tend vers l'infini.

Dans cette version abrégée, on ignore les questions de mesurabilité, et quelques preuves, une version antérieure du cours plus complète peut être trouvée sur ma page web.

En vert : des considérations plus théoriques, liées à la mesurabilité.

Préliminaires sur la loi de Poisson

- $\mathcal{P}(\lambda)$: Loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Soit $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \mathbb{E}(N) = \text{Var}(N) = \lambda.$$

En particulier, $\mathcal{P}(0) \sim 0, \mathcal{P}(\infty) \sim \infty$. On a aussi pour $t \in \mathbb{R}$ la fonction caractéristique

$$\mathbb{E}(e^{itN}) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

— $\mathcal{B}(n, p)$: Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$. Soit $N \sim \mathcal{B}(n, p)$. Soit $k \in [n]$. Alors

$$\mathbb{P}(N = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \mathbb{E}(N) = np, \text{Var}(N) = np(1-p) \approx \mathbb{E}(N) \text{ si } p \approx 0.$$

Approximation Poisson / binomiale Soit $n \geq 1, 0 < \lambda \leq n$. Soit $B_n \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$. Alors $B_n \rightarrow P \stackrel{(d)}{=} \mathcal{P}(\lambda)$ en loi : pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(B_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(P = k)$$

Démonstration. Montrer par le calcul que pour $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \rightarrow \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

□

1.1 Processus binomial

Notation 1. Soit $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$ muni d'une mesure μ telle que $0 < \mu(\mathbb{X}) < \infty$, et la mesure renormalisée

$$\tilde{\mu}_{\mathbb{X}}(B) := \frac{\mu(\mathbb{X} \cap B)}{\mu(\mathbb{X})}$$

pour $B \in \mathcal{X}$. Pour $n \geq 1$, on appelle processus binomial sur A l'ensemble aléatoires de points

$$\mathcal{B}_{n, \mathbb{X}} = \{X_1, \dots, X_n\}$$

où les X_i sont des variables i.i.d. de loi $\tilde{\mu}_{\mathbb{X}}$ (μ est implicite).

Exemple 1. Si $\mu = \mathcal{L}^d$ est la mesure de Lebesgue restreinte à \mathbb{X}

$$\tilde{\mu}(B) = \mathcal{L}^d(\mathbb{X} \cap B) / \mathcal{L}^d(\mathbb{X})$$

on parle de processus binomial uniforme sur \mathbb{X} .

C'est une manière naturelle de tirer un "ensemble de points au hasard" dans l'espace. Cette manière de faire comporte plusieurs problèmes :

- Pas d'indépendance spatiale : savoir qu'il y a k points dans un sous-ensemble A implique qu'il y en a $n - k$ dans son complémentaire. Mais pour A, B petits (par rapport à W), on voit que les nombres de points qui tombent dans A et B sont "peu liés". On peut imaginer que quand $n \rightarrow \infty$, si on a un objet limite, ces nombres seront indépendants. Ce qui est surprenant c'est qu'il va suffire de rendre aléatoire (avec une loi de Poisson) le nombre n de points pour avoir l'indépendance spatiale.
- Pas de modèle infini (sur tout \mathbb{R}^d).
- le nombre de points n'est pas aléatoire, alors que pour certains problèmes on n'a pas de raison à priori de connaître le nombre de points.
- Mauvaise compatibilité avec les opérations ensemblistes : sauf exceptions, l'union ou l'intersection de processus binomiaux n'est pas un processus binomial.

Idée : objet infini à la limite On a un objet fini de plus en plus grand ($\mathcal{B}_{n, \mathbb{X}}$) et on veut lui attribuer une limite infinie \mathcal{P} quand $n \rightarrow \infty$ et $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

On note $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\mathbb{X}}$ l'ensemble des fermés de \mathbb{X} , on va définir les variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{F} .

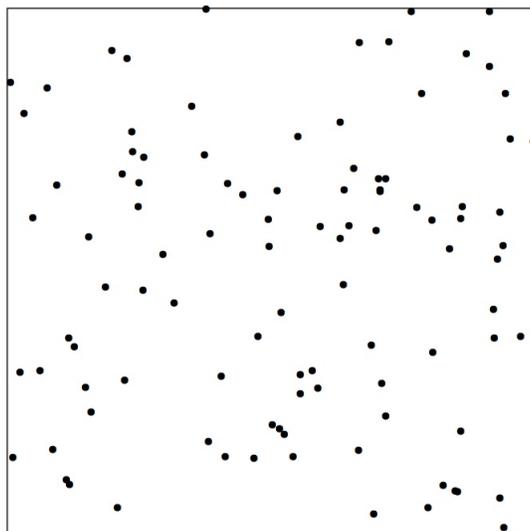


FIGURE 1.1 – 100 points uniformes

Définition 1. *Un fermé aléatoire est un ensemble fermé $F \in \mathbb{F}$ construit à partir de variables aléatoires mesurables.*

Cadre formel : Fermés aléatoires

[Ouvrage de référence : Ilya Molchanov, **Theory of random closed sets**]

L'objet $\mathcal{B}_{n,W}$ qu'on étudie est un ensemble aléatoire, nous allons établir un cadre rigoureux d'ensembles aléatoires : les **fermés aléatoires**.

Notation 2. *On part d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit \mathbb{X} un sous espace de \mathbb{R}^d (en première lecture, on pourra considérer $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$). On introduit*

- $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\mathbb{X}}$: Sous-ensembles fermés de \mathbb{X} (Rappel : $\mathbb{F}_{\mathbb{X}} = \{F \cap \mathbb{X} : F \text{ fermé de } \mathbb{R}^d\}$)
- $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{\mathbb{X}}$: Sous-ensembles compacts de \mathbb{X}

Notation :

- $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| \leq r\}$, la boule fermée de centre x de rayon r
 - $B^o(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < r\}$, la boule ouverte de centre x de rayon r
- Pour $A \subset \mathbb{X}, F \in \mathbb{F}$, on introduit

$$\psi_A(F) = \mathbf{1}_{\{A \cap F = \emptyset\}}, \quad \psi^A(F) = \mathbf{1}_{\{A \cap F \neq \emptyset\}}.$$

Attention : $\mathbb{K} \neq$ ensembles bornés de $\mathbb{F}_{\mathbb{X}}$!

Définition 2. On munit \mathbb{F} de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{F})$ engendrée par les $\psi^K, K \in \mathbb{K}$.

Formellement, un fermé aléatoire est une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{F}, \mathcal{B}(\mathbb{F}))$

Voir exo 27

En général, on considère une VA \mathcal{X} (ou un processus) sur un autre espace, dont on sait déjà qu'elle est mesurable, et on écrit que \mathcal{F} est mesurable par rapport à \mathcal{X} , ce qui veut dire que $\mathcal{F} = \varphi(\mathcal{X})$ pour une certaine fonction mesurable φ . On écrit aussi $\mathcal{F} \in \sigma(\mathcal{X})$, ce qui permet de conclure que \mathcal{F} est mesurable, et donc \mathcal{F} est un FA si \mathcal{F} est p.s. fermé.

Un **fermé aléatoire** est formellement une application $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$ tel que pour tout $K \in \mathbb{K}$,

$$\{\omega \in \Omega : \mathcal{F}(\omega) \cap K \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}.$$

1.2 Processus ponctuels

Soit $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$ mesurable.

Définition 3. On note $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{\mathbb{X}}$ la classe des sous-ensembles compacts de \mathbb{X} .

Exemple 2. Si \mathbb{X} est un fermé de \mathbb{R}^d , \mathbb{K} est la classe des fermés bornés de \mathbb{X} .

Exemple 3. Si $\mathbb{X} =]0, \infty[$, $]0, 1[$ n'est pas un compact de \mathbb{X} car toute suite de $]0, 1[$ n'y admet pas de valeur d'adhérence.

Définition 4. On appelle $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathbb{X}} \subset \mathbb{F}$ la classe des **configurations** ou "ensembles de points", ou "ensembles localement finis", ou "mesures ponctuelles" de \mathbb{X} . $F \in \mathbb{F}$ est dans \mathcal{N} s'il est localement fini, c'est-à-dire ssi $\#F \cap K$ est fini et entier pour tout compact $K \in \mathbb{K}$.

Voir exos 28,14

Cette définition est justifiée par le fait suivant : un ensemble dénombrable M est fermé si il est localement fini. Autrement dit, si $M = \{x_i; i \geq 1\}$ est un ensemble de points non localement fini, comme par exemple $\{1/n; n \in \mathbb{N}\}$, il se peut qu'il ne soit pas fermé (en effet 0 est dans l'adhérence de M sans être dans M).

Exemple 4. $A = \{1/n; n \in \mathbb{N}^*\} \notin \mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ mais $A \in \mathcal{N}_{]0,1[}$.

La tribu "trace" sur \mathbb{M} est la tribu

$$\mathcal{B}(\mathbb{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{F}) \cap \mathcal{N} = \{A \cap \mathcal{N}; A \in \mathcal{B}(\mathbb{F})\}.$$

Exercice 1. \mathcal{N} est bien mesurable, i.e. $\mathcal{N} \in \mathcal{B}(\mathbb{F})$.

Définition 5. Un processus ponctuel (PP) est un fermé aléatoire \mathcal{M} tel que $\mathbb{P}(\mathcal{M} \in \mathcal{N}) = 1$.

Exemple 5. Soit $\mathcal{B}_{n,W} = \{X_1, \dots, X_n\}$ l'ensemble binomial tel qu'introduit auparavant. Il est fini, donc fermé, et construit à partir des variables aléatoires X_i . On a l'évènement

$$(\mathcal{B}_{n,W} \cap K = \emptyset) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \cap K = \emptyset)$$

est mesurable car chaque $(X_i \cap K = \emptyset) = (X_i \notin K)$ est mesurable (i.e. $\in \mathcal{A}$) car X_i est une variable aléatoire. Donc $\mathcal{B}_{n,W}$ est un fermé aléatoire.

1.3 Fonctionnelle de capacité

Soit $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$ mesurable.

Définition 6. Soit \mathcal{F} un fermé aléatoire. On appelle "fonctionnelle de capacité" de \mathcal{F} l'application qui prend en argument un ensemble compact K de \mathbb{X} :

$$T_{\mathcal{F}}(K) = \mathbb{P}(\mathcal{F} \cap K \neq \emptyset), K \in \mathbb{K}.$$

Proposition 1. La loi d'un fermé aléatoire \mathcal{F} est caractérisée par sa fonctionnelle de capacité : deux fermés aléatoires $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ ont la même loi si $T_{\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}'}$.

Démonstration. Cela découle du fait que la tribu est générée par la classe $\Lambda = \{\mathcal{A}_K : K \in \mathbb{K}\}$ où

$$\mathcal{A}_K := \{F \in \mathbb{F} : F \cap K \neq \emptyset\}$$

et $T_{\mathcal{F}}(K) = \mu(\mathcal{A}_K)$, où μ est la loi de \mathcal{F} .

Rappel Soit (A, \mathcal{A}) un espace mesurable, et $\Lambda \subset \mathcal{A}$ une classe d'ensembles telle que $\mathcal{A} = \sigma(\Lambda)$. Alors si deux mesures μ, μ' sur \mathcal{A} coïncident sur Λ , $\mu = \mu'$. \square

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}, \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$ borné. Calculer $T_{\mathcal{B}_{n,\mathbb{X}}}$.

Exercice 3. Soit X, X' des variables aléatoires sur \mathbb{R} , et $\mathcal{F} =]-\infty, X], \mathcal{F}' =]-\infty, X']$ des fermés aléatoires sur $\mathbb{X} = \mathbb{R}$. Montrer que si $T_{\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}'}$, $X \stackrel{(d)}{=} Y$.

A la lumière de cet exemple, on peut voir la fonctionnelle de capacité comme l'analogie pour les FA de la fonction de répartition pour les VA réelles.

1.4 Processus de Poisson

Soit μ une mesure finie sur \mathbb{X} . On suppose également implicitement que μ n'a pas d'atomes, i.e.

$$\mu(\{x\}) = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d,$$

on ne le rappellera pas à chaque fois. Soit $X_n, n \geq 1$ des variables iid de loi $\tilde{\mu} := (\mu(\mathbb{X}))^{-1}\mu$.

Définition 7. Soit une variable de Poisson $N \sim \mathcal{P}(\mu(A))$ indépendante des X_n et

$$\mathcal{P} := \{X_1, \dots, X_N\}.$$

Autrement dit, $\mathcal{P} = \mathcal{B}_{N, \mathbb{X}}$. C'est bien un processus ponctuel car son nombre de points est p.s. fini. On l'appelle Processus ponctuel de Poisson (PPP) d'intensité μ sur \mathbb{X} , on note sa loi $PPP(\mu; \mathbb{X})$.

\mathcal{P} est un ensemble aléatoires de points. En tant que fermé aléatoire, il est caractérisé par sa fonctionnelle de capacité.

Proposition 2. Soit $\mathcal{P} \sim PPP(\mu; \mathbb{X})$. Alors pour K borné

$$\mathbb{P}(\mathcal{P} \cap K = \emptyset) = \exp(-\mu(K)).$$

En particulier pour $K \subset \mathbb{X}$ compact

$$T_{\mathcal{P}}(K) = 1 - \exp(-\mu(K)).$$

Exercice 4. Faire la preuve.

Remarque 1. L'observation fondamentale est que ça ne dépend pas de \mathbb{X} .

Une première propriété est que la restriction d'un PPP est encore un PPP :

Proposition 3. Pour $B \subset \mathbb{X}$, $\mathcal{P}_B := \mathcal{P} \cap B$ a la loi $PPP(\mu; B)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour C compact de B ,

$$T_{\mathcal{P}_B}(C) = \mathbb{P}(\mathcal{P}_B \cap C \neq \emptyset) = \mathbb{P}(\mathcal{P} \cap C \neq \emptyset) = 1 - \exp(-\mu(C)).$$

□

Remarque 2. μ est formellement définie comme mesure sur \mathbb{X} , mais c'est trivialement aussi une mesure sur B car pour $A \subset B$ mesurable, $\mu(A)$ est bien défini car A est un mesurable de \mathbb{X} .

Une conséquence est que si l'on fait l'union de deux processus de Poisson indépendants sur des ensembles disjoints, on a encore un processus de Poisson.

Proposition 4. Soit $A, B \subset \mathbb{X}$ mesurables disjoints, et deux PPP indépendants, $\mathcal{P} \sim PPP(\mu; A)$ et $\mathcal{P}' \sim PPP(\mu; B)$. Alors $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ a la loi $PPP(\mu; A \cup B)$.

Exercice 5. Faire la preuve.

On peut en déduire une propriété fondamentale : l'indépendance spatiale :

Corollaire 1. Soit $\mathcal{P} \sim PPP(\mu; \mathbb{X})$. Pour $B, C \subset \mathbb{X}$ disjoints, k, m des entiers naturels,

$$\mathbb{P}(\#\mathcal{P} \cap B = k, \#\mathcal{P} \cap C = m) = \mathbb{P}(\#\mathcal{P} \cap B = k)\mathbb{P}(\#\mathcal{P} \cap C = m),$$

ou plus généralement pour toute fonctions bornées mesurables φ définie sur \mathcal{N}_B et ψ définie sur \mathcal{N}_C ,

$$\mathbb{E}(\varphi(\mathcal{P} \cap B)\psi(\mathcal{P} \cap C)) = \mathbb{E}(\varphi(\mathcal{P} \cap B))\mathbb{E}(\psi(\mathcal{P} \cap C)).$$

Exercice 6. Faire la preuve

Par récurrence, l'union de plusieurs PPP indépendants sur des ensembles disjoints est encore un PPP :

Proposition 5. Soit A_1, \dots, A_q des sous-ensembles mesurables disjoints de \mathbb{X} .

- (i) Soit $\mathcal{P} \sim PPP(\mu; \mathbb{X})$, et $\mathcal{P}_i := \mathcal{P} \cap A_i$. Alors les $\mathcal{P}_i, i = 1, \dots, q$ sont des PPP indépendants de lois respectives $PPP(\mu; A_i)$.
- (ii) Soit $\mathcal{P}_i \sim PPP(\mu; A_i)$ des PPP indépendants sur les A_i . Alors $\mathcal{P} := \cup_i \mathcal{P}_i$ a la loi $PPP(\mu; \cup_i A_i)$.

1.5 Lien avec le processus de Poisson temporel

Soit $T_k, k \geq 1$ des variables iid de loi $\mathcal{E}(1)$, et soit leurs sommes partielles

$$S_k = \sum_{i=1}^k T_i$$

où $S_0 = 0$. Enfin, on définit le processus (temporel) de Poisson par

$$X_t := \#\{k : S_k \leq t\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_k \leq t\}}, t \geq 0.$$

On sait (ou pas) que

- pour tout $t \geq 0$, $X_t \sim \mathcal{P}(t)$, autrement dit,

$$\#\{k : S_k \in [0, t]\} \sim \mathcal{P}(\mathcal{L}^d([0, t]))$$

- propriété de Markov : Pour $t \geq 0$, $\{X_{t+s} - X_t; s \geq 0\}$ est indépendant de $\{X_u, 0 \leq u \leq t\}$ (le futur est indépendant du passé).

On définit

$$\mathcal{P} = \{S_k; k \geq 1\}.$$

\mathcal{P} n'est pas un ensemble fini donc il ne rentre pas dans le cadre défini précédemment, mais il en a tout de même les propriétés : pour $A \subset \mathbb{R}_+$,

$$\#\mathcal{P} \cap A \sim \mathcal{P}(\mathcal{L}^1(A)),$$

et en particulier pour K compact

$$T_{\mathcal{P}}(K) = 1 - \exp(-\mathcal{L}^1(K))$$

- Exercice 7.**
1. Le montrer pour $K = [a, b]$ pour $0 \leq a \leq b$.
 2. Le montrer pour $K = \cup_{i=1}^m [a_i, b_i]$ où $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_m \leq b_m$.
 3. (On peut admettre cette question) Montrer que pour tout K compact de \mathbb{R}_+ , il existe une suite d'ensembles $K_m, m \geq 1$ telle que
 - Chaque K_m est de la forme du 2)
 - $K_{m+1} \subset K_m$ pour tout m
 - $K = \cap_{m=1}^{\infty} K_m$.
 On peut choisir par exemple

$$K_m = \{x \in \mathbb{R} : d(x, K) \leq 1/m\}.$$

4. En déduire que pour $T < \infty$, $\mathcal{P} \cap [0, T] \sim PPP(\mathcal{L}^d, [0, T])$.

\mathcal{P} est donc dans un sens un processus de Poisson “infini” sur \mathbb{R}_+ . Définissons-le de manière plus générale.

1.6 Construction sur une mesure localement finie

Notation 3. (Rappel) une mesure μ sur \mathbb{X} est localement finie (LF) si pour tout compact K de \mathbb{R}^d ,

$$\mu(K \cap \mathbb{X}) < \infty.$$

Soit \mathbb{X} un ensemble mesurable de \mathbb{R}^d , μ une mesure LF sur \mathbb{X} (mais pas forcément finie comme à la section précédente). Soit $\mathbb{X}_k, k \geq 1$ des ensembles disjoints bornés tels que $\mathbb{X} = \cup_k \mathbb{X}_k$ et tels que tout compact K ait un recouvrement fini, i.e. il existe n_K tel que

$$K \subset \cup_{i=1}^{n_K} \mathbb{X}_i.$$

Exemple 6. La mesure de Lebesgue est LF. Les \mathbb{X}_k peuvent être obtenus par exemple en prenant $m^{(k)}, k \geq 1$ une énumération de \mathbb{Z}^d (qui est bien dénombrable), et en posant

$$\mathbb{X}_k = \mathbb{X} \cap \prod_{i=1}^d [m_i^{(k)}, m_{i+1}^{(k)}[,$$

où $m_i^{(k)}$ est la i -ème composante de $m^{(k)}$, mais il y a plein d'autres manières de faire! (Il se peut que certains \mathbb{X}_k soient vides, mais ça n'est pas un souci). On a dans tous les cas $\mu(\mathbb{X}_k) < \infty$ car \mathbb{X}_k est borné, donc inclus dans un compact.

Théorème 1. Soit $\mathcal{P}_k \sim PPP(\mu; \mathbb{X}_k), k \geq 1$ des processus de Poisson indépendants sur les \mathbb{X}_k . Soit

$$\mathcal{P} = \cup_k \mathcal{P}_k.$$

Alors \mathcal{P} est un PP sur \mathbb{X} dont la loi est définie par

$$T_{\mathcal{P}}(K) = 1 - \exp(-\mu(K)), K \in \mathbb{K}.$$

On l'appelle processus de Poisson d'intensité μ sur \mathbb{X} , et on le note $PPP(\mu; \mathbb{X})$, ou juste $PPP(\mu)$ si $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$. On remarque que sa loi ne dépend pas de la partition $(\mathbb{X}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ choisie.

Notation 4. Si $\mu = \lambda \mathcal{L}^d$ pour un certain $\lambda \geq 0$, on utilise la notation $\mathcal{P} \sim PPP(\lambda; \mathbb{X})$, ou $PPP(\lambda)$ si $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$. On dit que \mathcal{P} est le PPP homogène d'intensité λ sur \mathbb{X} .

Exercice 8. Si $\{X_t; t \geq 0\}$ est un processus temporel de Poisson, soit $\mathcal{P} := \{t : X_{t+} \neq X_{t-}\}$ l'ensemble de ses sauts. Alors

$$\mathcal{P} \sim PPP(1, \mathbb{R}_+).$$

Soit $\{X'_s; s \geq 0\}$, un autre processus temporel de Poisson indépendant et \mathcal{P}' l'ensemble des sauts de X' . Montrer que $\mathcal{P} \cup (-\mathcal{P}') \sim PPP(1)$.

Démonstration. Soit $K \in \mathbb{K}$, et $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ tels que

$$K \subset K_n := \cup_{k=1}^n \mathbb{X}_k.$$

On considère désormais la restriction $\bar{\mu}$ de μ à K_n , qui est bien une mesure finie car K_n est un compact.

On sait que $\mathcal{P}' := \mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap K_n$ a la loi $PPP(K_n; \bar{\mu})$. Comme $K \subset K_n$,

$$T_{\mathcal{P}}(K) = T_{\mathcal{P}'}(K) = 1 - \exp(-\bar{\mu}(K)) = 1 - \exp(-\mu(K)).$$

□

On a les propriétés suivantes :

Propriétés 1. Soit \mathbb{X} un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^d , et μ une mesure LF sur \mathbb{X} . Soit $A \subset \mathbb{X}$ mesurable. Alors le processus \mathcal{P} de loi $PPP(\mu; \mathbb{X})$ vérifie

1. $\mathcal{P} \cap A \sim PPP(\mu; A)$.
2. $\#\mathcal{P} \cap A$ est une variable de Poisson de paramètre $\mu(A)$ (avec $N \sim \mathcal{P}(\infty) \Leftrightarrow N = +\infty$ p.s.)
3. Pour tous mesurables disjoints A_1, \dots, A_q , les PP ($\mathcal{P} \cap A_j; 1 \leq j \leq q$) sont indépendants.

Démonstration. 1. cf. section précédente

2. On écrit $A = \cup_n A_n$ avec

$$A_n = A \cap (\cup_{i=1}^n \mathbb{X}_i).$$

On a alors p.s.

$$\#A \cap \mathcal{P} = \lim_n \#A_n \cap \mathcal{P}$$

et $\#A_n \cap \mathcal{P} \sim \mathcal{P}(\mu(A_n))$ car $A_n \cap \mathcal{P} \sim PPP(\mu(A_n))$. On peut conclure grâce au lemme suivant :

Lemme 1. Soit λ_n une suite croissante de nombres réels de limite $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Alors $\mathcal{P}(\lambda_n) \rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ en loi.

Donc

$$\#\mathcal{P} \cap A \sim \mathcal{P}(\lim_n \mu(A_n)) = \mathcal{P}(\mu(A))$$

grâce aux axiomes de la définition d'une mesure μ .

3. Identique au cas μ finie. □

Notation 5. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable localement bornée (LB), c'est-à-dire telle que pour tout compact K ,

$$\|f\|_K := \sup_K |f(x)| < \infty.$$

Soit μ la mesure dont la densité par rapport à \mathcal{L}^d est f . Alors μ est LF (exercice) et on note $\mathcal{P}(f; \mathbb{R}^d)$ le PPP d'intensité μ .

Si f est la fonction constante égale à $\lambda > 0$, $\mu = \lambda \mathcal{L}^d$ et $\mathcal{P} \sim PPP(\lambda)$.

Exercice 9. [Intégration stochastique et paradoxe d'Olber] Soit $\mathcal{P} \sim PPP(1) = PPP(\mathbb{R}^d) = PPP(\mathcal{L}^d)$. Le but de cet exercice est d'établir des propriétés de bases d'intégrales du type

$$I_f := \sum_{x \in \mathcal{P}} f(x) = \text{''} \int f(x) d\mathcal{P}(x) \text{''}$$

pour f mesurable positive. En particulier, on souhaite montrer

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_f) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \\ \text{Var}(I_f) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^2 dx \end{aligned}$$

Cela pose le paradoxe de la "nuit noire", ou paradoxe d'Olber. Si l'on suppose que les galaxies sont réparties de manière homogène dans l'espace infini, et que chaque galaxie diffuse une énergie électromagnétique qui décroît en $\frac{1}{\text{distance}^2}$, on a dans \mathbb{R}^3

$$\mathbb{E}\left(\sum_{x \in \mathcal{P}} \frac{1}{\|x\|^2}\right) = \infty,$$

ce qui implique que l'énergie électromagnétique arrivant en chaque point de la Terre (ou n'importe quel point) est infinie en moyenne.

1. Le montrer pour $f = 1_A$, $A \subset \mathbb{R}^d$.
2. Le montrer pour f étagée, i.e. $f = \sum_{i=1}^q \lambda_i 1_{A_i}$, pour des $A_i \subset \mathbb{R}^d$ disjoints et $\lambda_i \geq 0$.
3. Le montrer pour $f \geq 0$ quelconque.
4. Montrer la formule d'Olber.

Notation Soit $\mathbb{X}' \subset \mathbb{X}$, μ une mesure LF sur \mathbb{X} . Alors la notation $PPP(\mu; \mathbb{X}')$ se réfère naturellement à la restriction de la mesure μ à \mathbb{X}' . Ainsi par exemple $PPP(\lambda; \mathbb{X})$ pour $\mathbb{X} \subsetneq \mathbb{R}^d$ se réfère à la restriction de la mesure $\lambda \mathcal{L}^d$ à l'ensemble \mathbb{X} . On a aussi pour $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ LB le processus $PPP(f; \mathbb{X}')$ qui concerne la restriction de la densité f à l'ensemble \mathbb{X}' .

1.7 Activité pratique : séismes

Exercice 10 (Tremblements de terre).

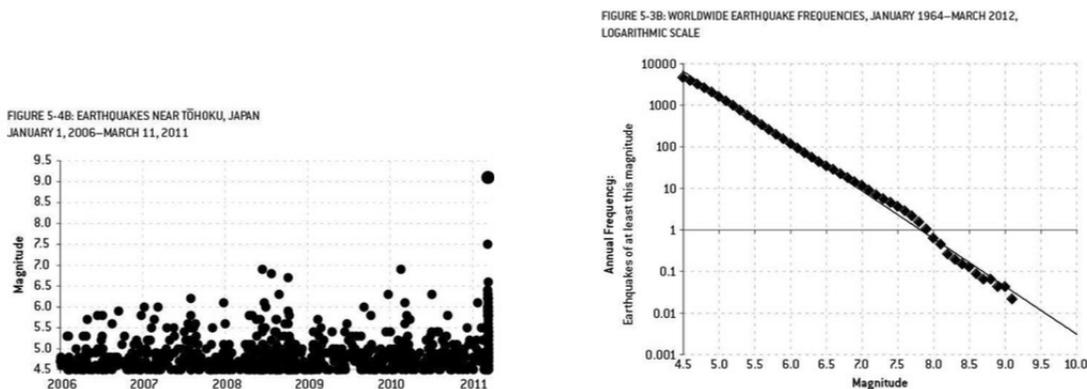


FIGURE 1.2 – *Gauche* : Tremblements de terre dans la région de Tohoku. *Droite* : Nombre de tremblements (ordonnées) de magnitude plus grande qu’une magnitude donnée (abscisses)

Un tremblement peut s’assimiler à la donnée d’un couple (t, m) où $t \in \mathbb{R}_+$ est la date (en années) et $m \in \mathbb{R}_+$ est la magnitude sur l’échelle de Richter. La figure de gauche montre les occurrences de différents tremblements de terre dans la région de Tohoku, au Japon, entre 2006 et 2011. On suppose dans cet exercice que l’ensemble $\mathbf{M} = \{(t_i, m_i); i \geq 1\}$ des tremblements de terre dans une région donnée dans le temps peut s’assimiler à un processus de Poisson non-homogène sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

1. La figure de droite montre la fréquence annuelle de tremblements de terre de chaque magnitude dans le monde entre 1964 et 2012. Sur l’axe des ordonnées on montre le nombre N de tremblements de terre d’une magnitude donnée sur une échelle logarithmique (c’est-à-dire que l’échelle est linéaire en $\ln(N)$, mais c’est le nombre N qui est indiqué sur la graduation).
 - (a) En supposant que les points de la figure de droite forment une droite exacte, évaluer approximativement la valeur du paramètre de pente d’après la figure.
 - (b) On suppose que le modèle est stationnaire dans le temps, c’est-à-dire que la loi du nombre de points qui tombe sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ ne dépend que de l’écart $t_2 - t_1$. Déduisez-en la forme de la mesure d’intensité μ , i.e. telle que $\mathbf{M} \sim PPP(\mu)$.
 - (c) A l’aide du graphique de droite, donnez la mesure d’intensité μ à une constante près.
2. On suppose que les tremblements de terre de la région de Tohoku se répartissent aussi selon un processus de Poisson avec le même type d’intensité, à la constante près, mais le paramètre de pente est le même. Il y a cependant évidemment moins de tremblement de terre dans la région de Tohoku que sur le globe tout entier.
 - (a) Il y a environ 700 points sur la figure de gauche. Déduisez-en une valeur approximative pour la constante, et l’intensité du processus ponctuel des tremblements de terre à Tohoku (on supposera que le nombre de points présent est proche de son espérance).
 - (b) D’après ce modèle, combien de séismes de magnitude comprise entre 5,5 et 6 observe-t-on en moyenne sur une période temporelle $[t_1, t_2]$? Cela confirme-t-il les observations (calculatrice requise)?
 - (c) Selon le modèle que l’on vient d’établir, quelle est la probabilité qu’il y ait un tremblement de terre de magnitude supérieure à 7 dans les 10 prochaines années?

1.8 Autres propriétés

1.8.1 Stationarité

Soit $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$.

Définition 8. On dit qu'un fermé aléatoire $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$ est stationnaire si sa loi est invariante par translation : pour $x \in \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{F} + x = \{x + f; f \in \mathcal{F}\} \stackrel{(d)}{=} \mathcal{F}$$

Il faut monter concrètement que

$$\mathbb{P}(\mathcal{F} \cap K = \emptyset) = \mathbb{P}((x + \mathcal{F}) \cap K = \emptyset) = \mathbb{P}(\mathcal{F} \cap (K - x) = \emptyset)$$

pour K compact.

C'est une propriété qui assure qu'aucune zone de \mathbb{R}^2 ne reçoit un traitement différent d'une autre zone.

Lorsqu'on modélise un "grand" milieu, c'est-à-dire où l'échelle des caractéristiques locales est petite devant celle des caractéristiques globales, il est pertinent d'utiliser un modèle stationnaire.

Théorème 2. Soit μ une mesure LF sur \mathbb{R}^d , et $\mathcal{P} \sim PPP(\mu)$. Alors \mathcal{P} est stationnaire ssi $\mu = \lambda \mathcal{L}^d$ pour un certain $\lambda \geq 0$ (et donc $\mathcal{P} \sim PPP(\lambda)$).

Démonstration. Rappel

1. La mesure de Lebesgue \mathcal{L}^d sur \mathbb{R}^d est invariante par translation : pour $x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{L}^d(A + x) = \mathcal{L}^d(A)$$

2. Toute mesure μ qui est invariante par translation est égale à la mesure de Lebesgue : $\mu = a \mathcal{L}^d$ pour un certain $a \geq 0$. En fait il suffit qu'elle ne soit invariante que sur les compacts car ces derniers engendrent la tribu des boréliens : pour $x \in \mathbb{R}^d, K \in \mathbb{K}$,

$$\mu(K + x) = \mu(K).$$

Si \mathcal{P} est stationnaire, pour A mesurable, la loi de $\#\mathcal{P}(A)$ est la loi de $\#\mathcal{P}(A + x)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, en particulier elles ont la même espérance :

$$\mu(A) = \mathbb{E}(\#\mathcal{P} \cap A) = \mathbb{E}(\#\mathcal{P} \cap (A + x)) = \mu(A + x)$$

donc μ est invariante par translation, donc $\mu = \lambda \mathcal{L}^d$ pour un certain $\lambda \geq 0$.

Si réciproquement $\mu = \lambda \mathcal{L}^d$, on a pour K compact et $x \in \mathbb{R}^d$,

$$T_{\mathcal{P}}(K) = 1 - \exp(-\lambda \mathcal{L}^d(K)) = 1 - \exp(-\lambda \mathcal{L}^d(K + x)) = T_{\mathcal{P}}(K + x)$$

donc \mathcal{P} est stationnaire. □

1.8.2 Réalisations typiques

Les points d'un processus de Poisson homogène \mathcal{P} ne se mettent jamais dans des configurations "spéciales". Par exemple pour tout $x \in \mathbb{R}^d, \mathbb{P}(x \in \mathcal{P}) = 0$. Cela justifie par exemple les égalités en loi du type

$$PPP(f; \mathbb{R}) = PPP(f; \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

où f est une fonction positive LF. On a aussi dans \mathbb{R}^2

Proposition 6. Soit $\mathcal{P} \sim PPP(\lambda, \mathbb{R}^2)$ pour un $\lambda > 0$. Alors p.s. \mathcal{P} n'a pas 3 points alignés.

Remarquons que cette assertion n'a de sens que si l'évènement " \mathcal{P} a 3 point alignés " est mesurable. La méthode pour montrer ce genre de propriétés est toujours la même :

1. Le montrer pour un processus binomial dans une fenêtre bornée
2. Le montrer pour un PPP dans une fenêtre bornée
3. Le montrer pour un PPP global par passage à la limite.

Démonstration. Brièvement, pour montrer que l'évènement est mesurable, on écrit que c'est l'intersection sur n des évènements où 3 points à coordonnées rationnelles sont entre deux hyperplans à coordonnées rationnelles et parallèles à distance $1/n$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\text{3 points de } \{X_1, \dots, X_k\} \text{ alignés}) &\leq \sum_{\{i,j,l\} \subset \{1,2,\dots,n\}, i,j,l \text{ distincts}} \mathbb{P}(X_i, X_j, X_l \text{ alignés}) \\
 &= \sum_{\{i,j,l\}} \mathbb{P}(X_i \in \text{droite}(X_j, X_l)) \\
 &= \sum_{\{i,j,l\}} \int_{W_n^2} \underbrace{\mathbb{P}(X_i \in \text{droite}(x, y))}_{=0} f(x) f(y) \frac{dx dy}{\mathcal{L}^d(W_n)^2} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

2. Soit $W_n, n \geq 1$ des sous-ensembles de \mathbb{R}^2 tels que $\cup_{n \geq 1} W_n = \mathbb{R}^d$. Soit $N \sim \mathcal{P}(\mathcal{L}^d(W_n))$. Soit $X_i, i \geq 1$ une famille iid de variables uniformément réparties dans W_n . On sait que $\mathcal{P} \cap W_n \sim Y := \{X_1, \dots, X_N\}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\Omega_n) &= \mathbb{P}(\text{3 points de } Y \text{ alignés}) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}(\Omega_n | N = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}(\text{3 points de } \{X_1, \dots, X_k\} \text{ alignés}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

3. Alors p.s.

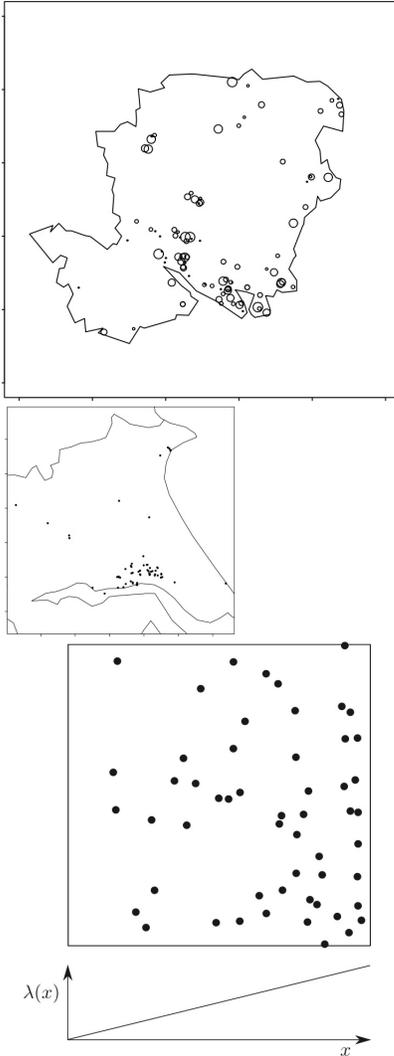
$$\begin{aligned}
 \mathbf{1}_{\{\text{3 points de } \mathcal{P} \text{ alignés}\}} &= \lim_n \mathbf{1}_{\underbrace{\{\text{3 points de } \mathcal{P} \text{ alignés dans } W_n\}}_{\Omega_n}} \\
 \mathbb{P}(\text{3 points alignés}) &= \lim_n \mathbb{P}(\Omega_n) = 0
 \end{aligned}$$

par le TCD de Lebesgue.

□

De la même manière,

$$\mathbb{P}(\text{2 points } y, z \text{ de } \mathcal{P} \text{ soient équidistants d'un 3ème point } x) = 0.$$



1.9 Activité : Simulation d'un Processus non-homogène par thinning

Soit $f(x)$ une fonction positive mesurable sur \mathbb{R}^d . Soit $\lambda > \|f\|_\infty$ et $\mathcal{P} \sim PPP(\lambda)$. On numérote $\mathcal{P} = \{x_i; i \geq 1\}$ les points de \mathcal{P} . Soit U_i des variables IID uniformes dans $[0, \lambda]$. Soit

$$\mathcal{P}' = \{x_i : U_{x_i} \leq f(x_i)\}.$$

Autrement dit, plus $f(x_i)$ est grand, plus x_i a de chances d'être conservé dans \mathcal{P}' . Le processus \mathcal{P}' a donc en moyenne plus de points dans les régions où $f(x)$ est élevée.

Exercice 11. Montrer qu'on peut aussi construire B_i de la manière suivante : Soit $B_i, i \geq 1$ des variables de Bernoulli indépendantes de paramètres $f(x_i)/\lambda$ (conditionnellement à \mathcal{P}), et le processus

$$\mathcal{P}'' = \{x_i : B_i = 1\}.$$

Alors $\mathcal{P}'' \stackrel{(d)}{=} \mathcal{P}'$.

Théorème 3. *Le processus \mathcal{P}' satisfait :*

— Pour $A \subset \mathbb{R}^d$, $\#\mathcal{P}' \cap A \sim \mathcal{P}(I_A)$ où

$$I_A := \int_A f(x) dx.$$

— *Indépendance spatiale.*

On appelle \mathcal{P}' le PPP d'intensité $f(x)$, et on le note $PPP(f)$.

Démonstration. Sous forme d'exercice.

Exercice 12. Soit A bornée. Conditionnellement à $\#\mathcal{P} \cap A$, montrer que $\#\mathcal{P}' \cap A$ est une binomiale de paramètres $n = \#\mathcal{P} \cap A$ et p où on précisera p . Déduisez-en la loi de $\#\mathcal{P}' \cap A$.

Indép. spatiale : Exo

□

1.10 TD1 : Processus de Poisson

Exercice 13. Pour un couple, on considère que son nombre d'enfants est une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1,9$. Sachant que chaque enfant a une chance sur deux d'être un garçon, quelle est la probabilité pour le couple d'avoir deux garçons sachant qu'ils ont au moins deux filles (on ne précise pas si ces garçons doivent naître avant ou après les filles) ?

Exercice 14. Montrer que tout $\mathcal{P} \in M_{\mathbb{X}}$ est dénombrable. Ca justifie l'appellation "processus ponctuels".

Numérotation Comme un PP \mathcal{P} est p.s. dénombrable, on peut numéroter ses points d'une manière arbitraire

$$\mathcal{P} = \{x_i; i \in \mathbb{N}\} \text{ ou } \mathcal{P} = \{x_i; i \geq 1\}.$$

Exercice 15. 1. Soit $\mathcal{F}_n \sim \mathcal{B}_{n,[-n^{1/d}, n^{1/d}]^d}$. Montrer que $T_{\mathcal{F}_n}(K) \rightarrow T_{\mathcal{P}}(K)$ pour tout compact K , où \mathcal{P} est un processus de Poisson dont on précisera les paramètres.

2. Soit $\mathcal{F}_n \sim \mathcal{B}_{n,[-n, n]^d}$. Vers quoi converge $T_{\mathcal{F}_n}$?

Exercice 16. Prouvez que pour $\mathbb{X}' \subset \mathbb{X}$ et μ une mesure LF sur \mathbb{X} , on a

$$PPP(\mu; \mathbb{X}') \stackrel{(d)}{=} PPP(\mu; \mathbb{X}) \cap \mathbb{X}'.$$

Exercice 17. Soit $\mathcal{P} = \{x_i; i \geq 1\}$ un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$ avec une numérotation quelconque (ex : par leur distance à l'origine, puis leur abscisse en cas d'égalité). Soit $B = \{B_i, i \geq 1\}$ une famille de variables aléatoires dans \mathbb{R}^d (pas forcément indépendantes). On suppose que B est indépendant de X . Soit $X' = \{x_i + B_i\}$.

1. Montrer que $X' \stackrel{(d)}{=} X$.

2. Trouver une famille $B_i, i \geq 1$ non-indépendante de \mathcal{P} telle que ça ne soit plus le cas

3. Construire un processus ponctuel \mathbf{M} telle que la propriété du 1) ne soit plus vraie.

Exercice 18. Soit $\mathcal{P} \sim PPP(\mathcal{L}^d; \mathbb{R}^d)$. Pour $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, soit $\mathcal{P}_\varphi = \{\varphi(x) : x \in \mathcal{P}\}$.

1. Soit $a > 0$, $\varphi(x) = ax, x \in \mathbb{R}^d$. Décrire \mathcal{P}_φ (PP ? PPP ? intensité ?)

2. Soit $\varphi(x) = x^2$ sur \mathbb{R} . \mathcal{P}_φ est-il un PPP sur \mathbb{R} ? Montrer que sa mesure d'intensité a une densité et la calculer.
3. Soit $\varphi(x) = 1/|x|$. \mathcal{P}_φ est-il un PPP sur \mathbb{R} ? Donner \mathbb{X} tel que \mathcal{P}_φ est un PP sur \mathbb{X} , et donner sa loi.

Exercice 19. Soit $\mathcal{P} \sim PPP(1)$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application mesurable. Soit $\mathbf{M} = \varphi(\mathcal{P})$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{L}^d(\varphi^{-1}(\{x\})) = 0$.

1. Montrez que p.s., pour tout $x \neq y \in \mathcal{P}$, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. On pourra commencer par le montrer pour $x, y \in W$ où W est une fenêtre bornée.
2. Soit K un compact tel que $\mathcal{L}^d(\varphi^{-1}(K)) < \infty$. Donner la loi de $\#\mathbf{M} \cap K$.
3. On suppose que la dimension d est égale à 1. Donner un exemple de fonction φ pour laquelle il existe un compact K tel que $\mathcal{L}^d(\varphi^{-1}(K)) = \infty$. \mathbf{M} est-il un processus ponctuel?
4. Soit $0 < a \leq b$. Donner la loi de $\#\mathbf{M} \cap [a, b]$ quand $\varphi(x) = \exp(x)$. Déduisez-en la loi de \mathbf{M} .

Exercice 20. Dans la construction du Processus de Poisson temporel sur \mathbb{R}_+ , si l'on remplace les variables exponentielles par d'autres lois, on ne récupère en général pas un processus de Poisson. Le montrer pour des lois de variables uniformes.

Exercice 21. Soit $\mathcal{P} \sim PPP(1; \mathbb{R}^d)$.

1. Calculer la loi de la distance au plus proche voisin de 0 : $V := \min_{x \in \mathcal{P}} \|x\|$ en déterminant $F(r) = \mathbb{P}(V \geq r)$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité que k points tombent dans $(\mathbb{R}_+)^d$.
3. Soit $\alpha > 0$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq x^{-\alpha}\}$. Calculer le nombre moyen de points qui tombent dans A en fonction de α .

Exercice 22. Soit $\mathcal{P} \sim PPP(1)$ dans \mathbb{R}^d :

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait d points qui tiennent dans le même hyperplan? Et $d + 1$ points? Quelle est la probabilité que $d + 1$ points soient sur une même sphère? Et $d + 2$ points?
2. Quelle est la probabilité que 3 points forment un triangle isocèle?
3. On prend $d = 2$. On suppose qu'un observateur se place en 0 et veut regarder dans la direction de l'axe des abscisses. Quelle est la probabilité que sa vision soit obstruée par un point d'un PPP? Quelle est la probabilité qu'il y ait un secteur angulaire $]\theta, \theta' [\subset [-\pi, \pi]$ non-vidue ou sa vision n'est pas du tout obstruée?
4. On prend $d = 2$. On suppose que chaque point est entourée d'une boule de rayon $\varepsilon > 0$. Quelle est la probabilité qu'aucune boule ne se touche?
5. * On prend $d = 2$. On suppose que chaque point $x \in X$ est entouré d'une boule de rayon $\frac{1}{\|x\|^3}$. Quelle est la probabilité que 2 boules se touchent?

Exercice 23 (Trouver des processus ponctuels qui admettent \mathcal{L}^d comme mesure d'intensité et qui ne soit pas un PPP.).

Soit $K_x = x + [-1/2, 1/2]^d$, $x \in \mathbb{Z}^d$. Soit $X_x, x \in \mathbb{Z}^d$ des variables indépendantes telle que X_x est unif. répartie dans K_x . Soit $\mathcal{P} = \{X_x, x \in \mathbb{Z}^d\}$.

1. Soit $A \subset K_0$. Montrer que $\mathbb{E}[\#\mathcal{P} \cap A] = \mathcal{L}^d(A)$.
2. Le montrer pour A borné et conclure.
3. Montrer que \mathcal{P} n'est pas stationnaire.
4. Soit

$$\mathcal{P}' = \{X_0 + x; x \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Montrer que \mathcal{P}' a \mathcal{L}^d comme mesure d'intensité.

5. * Montrer que \mathcal{P}' est stationnaire.

Exercice 24 (Thinning). Soit $\mathcal{P} = \{x_i : i \geq 1\}$ un PPP d'intensité μ . Soit $B_i, i \geq 1$ des VA iid de Bernoulli de paramètre p où $p \in [0, 1]$.

1. Soit $\mathcal{P}' = \{x_i : B_i = 1\}$. Montrer que \mathcal{P}' est un PPP et donner sa loi. On dit que \mathcal{P}' est le "thinning" (ou amincissement) de \mathcal{P} de paramètre p . Soit $\mathcal{P}'' = \{x_i : B_i = 0\}$. Montrer que \mathcal{P}' et \mathcal{P}'' sont indépendants.
2. Soit désormais une fonction $x \mapsto p_x \in [0, 1]$. On suppose que chaque point x_i est retiré avec probabilité p_{x_i} . Quelle est la loi du processus résultant ?
3. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ LF. Proposez une méthode pour simuler $PPP(f)$.

1.11 Convergence et construction alternative

Montrons que d'une certaine manière, le processus binomial converge vers le processus de Poisson. C'est une autre manière de définir les PPP, comme limite de processus binomiaux, mais on ne le fera pas rigoureusement ici car cela demande de définir une topologie sur \mathbb{F} .

Notation 6. Soit $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$, μ une mesure LF sur \mathbb{X} . Soit $(W_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous-ensembles de \mathbb{R}^d telles que

- $\cup_n W_n = \mathbb{R}^d$
- $\mu(W_n) = n$.

Par exemple si $\mu = \mathcal{L}^d$

$$W_n = [\pm(n/2)^{1/d}]^d.$$

Proposition 7. Pour K compact de \mathbb{R}^d

$$T_{\mathcal{B}_n, W_n}(K) \rightarrow T_{\mathcal{P}}(K)$$

Démonstration.

$$T_{\mathcal{B}_n}(K) = 1 - \left(1 - \frac{\mu(K)}{\mu(W_n)}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{\mu(K)}{n}\right)^n \rightarrow 1 - \exp(-\mu(K)) = T_{\mathcal{P}}(K)$$

□

Est-ce que ça implique rigoureusement que $\mathcal{B}_{n, W_n} \rightarrow \mathcal{P}$? En fait cette question n'est pas bien posée ici on n'a pas défini de topologie, et donc de convergence, tout dépend de la topologie considérée... Nous n'allons pas rentrer dans des considérations de convergence, mais voilà ce qu'on peut trouver dans la littérature :

- Construire une topologie à partir des ψ^O , O ouvert, et montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{F})$ est la tribu borélienne associée
- Montrer que si une suite de FA \mathcal{F}_n vérifie

$$T_{\mathcal{F}_n}(K) \rightarrow T(K)$$

pour une certaine fonction K , alors il existe un FA \mathcal{F} tel que $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}$ dans notre topologie.

— Montrer que si les \mathcal{F}_n sont des processus ponctuels et que pour tout compact K ,

$$\mathbb{E}(\sup_n \mathbb{E}(\mathcal{F}_n \cap K)) < \infty$$

alors \mathcal{F} est aussi un PP (livre de Kallenberg, ou livre de Molchanov).

D'après l'ouvrage de Molchanov, on pourrait alors définir $PPP(\mathcal{L}^d)$ comme la limite des $\mathcal{B}_{n,W}$. Pour une autre mesure μ LF, il suffit de considérer les $\mathcal{B}_W^\mu = \{X_1, \dots, X_n\}$ où $n = \lceil \mu(W) \rceil$ et les X_i sont iid de loi

$$\mu_W = \frac{\mu(\cdot \cap W)}{\mu(W)}.$$

Nous allons caractériser la convergence entre FA.

Théorème 4. Soit $\mathcal{F}_n, n \geq 1$ une suite de fermés aléatoires. On suppose que pour tout compact K il existe une limite $T(K)$:

$$T_{\mathcal{F}_n}(K) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(K).$$

Alors il existe un FA \mathcal{F} tel que $\mathbb{P}(\mathcal{F} \cap K \neq \emptyset) = T(K)$ et $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}$ en loi dans la topologie faible engendrée par les ψ^O, O ouvert.

Démonstration. Le résultat n'est pas directement énoncé comme ça dans le livre de Molchanov. D'après le théorème 6.2 de [Molchanov], il existe une sous-suite $\mathcal{F}_{n'}$ qui converge faiblement vers un FA \mathcal{F} , et donc $T_{\mathcal{F}_{n'}}(K) \rightarrow T_{\mathcal{F}}(K)$ pour $K \in \mathbb{K}$. Comme pour tout $K \in \mathbb{K}$, $T_{\mathcal{F}_n}(K) \rightarrow T(K)$, on a bien $T_{\mathcal{F}}(K) = T(K)$. Donc d'après le théorème 6.5, \mathcal{F}_n converge faiblement vers \mathcal{F} . \square

Proposition 8. Soit K un compact et $K_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^d : d(y, K) < \varepsilon\}$, qui est un ensemble ouvert pour $\varepsilon > 0$.

Soit $M \in \mathbb{M}$. Alors $\#M \cap K_\varepsilon \downarrow \#M \cap K$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Donc l'application $M \mapsto \#M \cap K$ est mesurable sur \mathbb{M} .

Démonstration. Comme K_1 est borné, il est inclus dans un compact et $\#M \cap K_1 < \infty$. Soit x_1, \dots, x_m les points de $M \cap K_1$, numérotés de telle sorte que x_1, \dots, x_k sont les points de $M \cap K$ pour un certain $k \leq m$. Comme K est fermé, $d(x_i, K) \geq \varepsilon_i$ pour $i > k$. Pour $\varepsilon < \min(\varepsilon_i)$, $\#M \cap K_\varepsilon = k = \#M \cap K$, CQFD. \square

Proposition 9. Un fermé aléatoire \mathcal{F} est un processus ponctuel si $\mathbb{E}(\#\mathcal{F} \cap K) < \infty$ pour tout compact K . Si une suite de FA \mathcal{F}_n converge vers \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathbb{M}$ si $\sup_n \mathbb{E}(\#\mathcal{F}_n \cap K) < \infty$ pour tout K .

Démonstration. Si pour tout K compact $\mathbb{E}(\#\mathcal{F} \cap K) < \infty$, $\mathcal{F} \cap K$ est p.s. fini, donc $\mathcal{F} \in \mathbb{M}$.

Supposons donc $\sup_n \mathbb{E}(\#\mathcal{F}_n \cap K) < \infty$ pour tout compact K . On voudrait utiliser

$$\mathbb{P}(\#\mathcal{F} \cap K < \infty) = \lim_n \mathbb{P}(\#\mathcal{F}_n \cap K < \infty) < \infty$$

mais cela requiert $\#\mathcal{F}_n \cap K \rightarrow \#\mathcal{F} \cap K$, ce qui est en général faux car $F \rightarrow \#\mathcal{F} \cap K$ n'est pas une application continue. Par contre si O est ouvert, $F \rightarrow \#\mathcal{F} \cap O$ est continue.

Soit K un compact, O un ouvert et K' un autre compact tels que $K \subset O \subset K'$. On a $n_O := \sup_n \mathbb{E} \#\mathcal{F}_n \cap O \leq n_{K'} := \sup_n \mathbb{E} \#\mathcal{F}_n \cap K' < \infty$ donc $\mathbb{E}(\#\mathcal{F} \cap K) \leq \mathbb{E} \#\mathcal{F} \cap O = \lim_n \mathbb{E}(\#\mathcal{F}_n \cap O) \leq n_O < \infty$. Donc $\mathcal{F} \in \mathbf{M}$. \square

Poisson ou binomial? Soit un jeu de données aléatoires dans une fenêtre A . Faut-il mieux le modéliser par un processus Poissonien ou binomial?

Si on connaît le nombre n de points, alors formellement il vaut mieux le modéliser par un processus binomial. Cependant, les lois des processus sont très proches, donc on peut aussi utiliser un processus de Poisson d'intensité $\frac{n}{\mathcal{L}^d(A)}$ (nombre moyen de points par unité de volume).

1.12 TD : Topologie et mesurabilité

Exercice 25. On munit \mathbb{F} de la topologie générée par les fonctions ψ_O, O ouvert borné.

1. On considère les fermés $B(1/n, 1)$. Est-ce que ça converge? Vers quoi?

Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{F})$ est la tribu borélienne associée.

Proposition 10. $\mathcal{B}(\mathbb{F})$ est aussi générée par les $\psi^K, K \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que l'on peut reconstruire $\psi_F, F \in \mathbb{F}$ à partir des ψ_O, O ouvert.

1. Montrons que les fonctionnelles

$$\varphi_O(F) := \mathbf{1}_{\{F \subset O\}}$$

sont mesurables. Soit d'abord $K \in \mathbb{K}$.

\square

1. Soit O un ouvert. Alors les applications ψ^O et $F \mapsto \#\mathcal{F} \cap O$ sont continues.
2. Montrer que $F_n := B(0, 1 - 1/n) \rightarrow F := B(0, 1)$, mais que pour un certain compact $K, \psi^K(F_n)$ ne converge pas vers $\psi^K(F)$.

Exercice 26. 1. Montrer que pour $\varepsilon > 0, K_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^d : \exists x \in K : \|x - y\| < \varepsilon\}$ est ouvert.

2. Montrer que pour K compact,

$$\psi_{K_\varepsilon} \rightarrow \psi_K \text{ sur } \mathbb{F}.$$

Montrer que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{F})$ est également générée par les classes suivantes

3. $\Lambda = \{\psi^K, K \in \mathbb{K}\}$
4. $\Lambda = \{\psi_K, K \in \mathbb{K}\}$
5. $\Lambda = \{K_1 \times K_2 : K_1 \in \mathbb{R}^p, K_2 \in \mathbb{R}^q \text{ compacts}\}$, avec $d = p + q$.

Exercice 27. Montrer que l'application suivante ψ est mesurable $(\mathbb{F}, \mathcal{B}(\mathbb{F})) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

1. $\psi : F \mapsto \mathbf{1}_{\{x \in F\}}$ pour $x \in \mathbb{R}^d$.
2. $\psi = \psi^G$, pour G fermé.

3. $\psi : F \mapsto \mathbf{1}_{\{F \subset O\}}$ pour O ouvert
4. $\psi : F \mapsto \mathbf{1}_{\{F \cap O \neq \emptyset\}}$ pour O ouvert
5. $\psi : F \mapsto \mathbf{1}_{\{F \subset G\}}$ pour G fermé
6. $\psi : F \mapsto \mathbf{1}_{\{\#(F \cap G) = k\}}$ pour G fermé, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 28. Soit

$$E = \{1/n; n \in \mathbb{N}^*\}.$$

A-t-on $E \in \mathcal{M}$ dans les cas suivants? E est-il fermé?

- $\mathbb{X} = \mathbb{R}$
- $\mathbb{X} = [0, \infty[$
- $\mathbb{X} =]0, \infty[$

Chapitre 2

Processus de Poisson marqué

Un modèle légèrement plus raffiné consiste à “attacher” à chaque point une marque indépendante, tirée dans un ensemble prédéfini. Par exemple pour modéliser une forêt :

$$\mathbf{M} = \{\text{Chêne}, \text{Pin}, \text{Tilleul}\}$$

ou pour modéliser une population d’individus de tailles variables

$$\mathbf{M} = \mathbb{R}_+,$$

chaque marque représente la taille de l’individu. Une manière naïve de le faire est de munir M d’une mesure de probabilité ν et de tirer des variables iid $M_k, k \geq 1$ de loi ν . On numérote les points de $\mathcal{P} : \mathcal{P} = \{x_1, x_2, \dots\}$ d’une manière arbitraire. Le processus marqué est alors défini par

$$\bar{\mathcal{P}} = \{(x_k, M_k)\}.$$

Il se trouve que c’est encore un PPP, sur l’espace produit $A \times M$:

Exemple 7. Soit M_1, \dots, M_k des variables iid sur \mathbb{R} . Soit T_1, \dots, T_k des variables iid de loi $\mathcal{E}(1)$, et les sommes partielles

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_{i+1} &= S_i + T_i. \end{aligned}$$

On considère le processus temporel

$$X_t := \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{\{S_i \leq t\}} M_i.$$

Rappelons que $\mathcal{P} := \{S_k; k \geq 1\}$ est un PPP sur \mathbb{R}_+ , d’intensité \mathcal{L}^1 . Donc X_t s’écrit également

$$X_t := \sum_{M_k \in \mathcal{P} \cap [0, t]} M_k.$$

Si on considère le processus “marqué” $\tilde{\mathcal{P}} := \{(S_k, M_k); k \geq 1\}$, on obtient le processus de Poisson composé dont les sauts sont indépendants de tailles aléatoires de loi ν

$$X_t := \sum_{(x, m) \in \mathcal{P} \cap [0, t] \times \mathbb{R}} m.$$

Proposition 11. Soit $(\mathbf{M}, \mathcal{M}, \nu)$ un espace probablisé, et $M_k, k \geq 1$ des variables iid de loi ν . Soit μ une mesure LF sur \mathbb{X} , et $\mathcal{P} \sim PPP(\mu)$. On considère le processus marqué $\bar{\mathcal{P}}$ défini précédemment.

On considère désormais l'espace marqué $\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \times \mathbf{M}$, muni de la mesure $\bar{\mu} := \mu \times \nu$. C'est une mesure LF et on considère le PPP \mathcal{P}' de loi $PPP(\bar{\mathbb{X}}, \bar{\mu})$. On a alors l'égalité en loi

$$\mathcal{P}' \stackrel{(d)}{=} \bar{\mathcal{P}}.$$

Autrement dit, un PPP marqué a la même loi qu'un PPP sur l'espace produit muni de la mesure produit.

Exercice 29. 1. On suppose $\mathbb{X} = K$ compact, on a donc

$$\mathcal{P} = \{x_1, \dots, x_N\}$$

où $N \sim \mathcal{P}(\mu(\mathbb{X}))$. Soit $K' \subset \mathbf{M}$ compact. Montrer que

$$\mathbb{P}(\forall 1 \leq i \leq N, M_i \notin K') = \exp(-\mu(K)\nu(K'))$$

2. Montrer que si \mathbb{X} n'est pas compact, pour tout compact $K \subset \mathbb{X}$, et $K' \subset \mathbf{M}$,

$$\mathbb{P}(\bar{\mathcal{P}} \cap (K \times K') = \emptyset) = \exp(-\mu(K)\nu(K')).$$

3. Montrer que pour $K \subset \mathbb{X}$ compact et $K' \subset \mathbf{M}$ compact, $K \times K'$ est un compact de $\mathbb{X} \times \mathbf{M}$. Un tel compact est dit *rectangulaire*.

4. (On pourra admettre) Pour tout compact K , il existe des unions de compacts rectangulaires disjoints décroissants $K_m, m \geq 1$ tels que

$$K = \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m.$$

5. Conclure.

On remarque que rien n'oblige ν à être finie, et on peut donner la définition générale d'un processus marqué.

Définition 9. Etant donné un espace \mathbf{M} avec une mesure LF ν , on appelle $\mathcal{P} \sim PPP(\mathbb{X} \times \mathbf{M}; \mu \times \nu)$ le PPP d'intensité μ marqué par ν .

2.1 Exemples

Exemple 8. 1. (Processus de saut, voir TD suivant) Soit $\mathcal{P} = \{x_1, x_2, \dots\} \sim PPP(\mathbb{R}_+)$. On considère le processus marqué $\mathcal{P}' = \{(x_1, M_1), (x_2, M_2), \dots\}$ où les M_i sont iid de loi ν sur \mathbb{R} . Le processus correspondant s'écrit

$$X_t := \sum_{(x, M) \in \mathcal{P}'} M \mathbf{1}_{\{x \leq t\}}.$$

Pour $\nu = \delta_1$, on retrouve le Processus de Poisson classique. Le théorème stipule que $\mathcal{P}' \sim PPP(\mathcal{L}^d \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \otimes \nu)$.

2. (Processus de naissances et morts) Dans un processus de naissances et morts, chaque point x_i est muni d'un temps de naissance B_i et d'une durée de vie D_i . L'espace de marques est donc $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. On peut imaginer un processus en temps infini, auquel cas les B_i sont répartis sur la droite réelle, et les durées de vie sont par défaut modélisées par des lois exponentielles de paramètre λ . On aurait donc

$$\mathcal{P}' \sim PPP(\mathcal{L}^d \mathbf{1}_{\mathbb{X}} \times \mathcal{L}^1 \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \times \mathcal{E}(\lambda))$$

. On remarque que dans ce cas la mesure de marquage n'est pas finie.

3. (Séismes) Voir activité.
 4. (Modèle booléen) On part de $\mathcal{P} \sim PPP(\mathbb{X})$. Les marques $R_i \in \mathbb{R}_+$ sont des "rayons aléatoires", i.e. des VA à valeurs dans $\mathbf{M} = \mathbb{R}_+$, et on étudie le modèle booléen

$$\mathcal{F} = \cup_i B(x_i, R_i).$$

Voir sections suivantes. Les boules peuvent être remplacées par n'importe quel type de formes (des segments, des ellipsoïdes, etc...).

5. (Champ aléatoire) Voir chapitre "shot noise"

2.1.1 Processus de Poisson composé

Processus de Poisson composé

Exercice 30. Soit $T_k; k \geq 1$ des variables exponentielles iid de paramètre 1, $S_k = \sum_{i=1}^k T_i$. On va définir une variante du processus temporel de Poisson où les sauts sont de taille aléatoire.

Soit ν une mesure de probabilité sur \mathbb{R} , et $\Delta_k, k \geq 1$ des variables iid de loi ν . On pose pour $t > 0$,

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_k \leq t\}} \Delta_k.$$

1. Donnez une représentation graphique de X_t , en indiquant les S_k et les Δ_k .
2. Pour quelle loi ν retrouve-t-on le processus temporel de Poisson classique ?
3. Soit $t > 0$. Soit N le nombre de temps t où $X_t \geq t + X_{t-}$:

$$N = \#\{t : X_t \geq t + X_{t-}\}.$$

Montrer que $N = \#\bar{\mathcal{P}} \cap A$ où A est un certain sous-ensemble de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et $\bar{\mathcal{P}}$ est un PPP marqué.

4. Montrer que $N \sim \mathcal{P}(\mathbb{E}((\Delta_1)_+))$. Donner un exemple où $N = \infty$ p.s.

2.2 Activité : Processus de naissance et mort

On souhaite modéliser une population qui satisfait aux critères suivants :

- Au temps 0, la population est représenté par un processus de Poisson homogène \mathcal{P}_0
- des individus naissent "de manière homogène et indépendante" dans le temps.
- Les individus meurent de manière indépendante après une durée de vie aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 31. 1. Modéliser cette population à l'aide de processus de Poisson marqués.

2. Donner la loi du nombre d'individus à un temps $t > 0$ dans un compact $K \subset \mathbb{R}^d$.

3. On suppose que les naissances s'arrêtent à un instant $t_0 > 0$. Comment modifier le modèle précédent ? Combien de temps faut-il pour que la population disparaisse d'un certain compact K ?

Modifions le modèle précédent : On suppose que chaque individu x donne naissance à d'autres individus à taux τ , et que chaque individu est dispersé aléatoirement selon une distribution de densité f , i.e. sa position est $x+U$, où U a pour densité f . Chaque individu vit toujours une durée exponentielle.

1. Quel est la loi du nombre d'enfants de chaque individu ?
2. Ecrire le PPM correspondant.
3. Montrer que la structure de la population suit un modèle de Galton-Watson. En déduire sous quelle condition la population s'éteint.

2.3 Modèle booléen

2.3.1 Activité : Modèle booléen et visibilité

Exercice 32. Soit $\mathcal{P} \sim PPP(1, \mathbb{R}^d)$. On numérote les points d'une manière arbitraire

$$\mathcal{P} = \{x_i; i \in \mathbb{N}\}.$$

On s'intéresse à l'ensemble aléatoire obtenu, pour $r > 0$,

$$\mathcal{F} = \cup_i B(x_i, r)$$

appelé *modèle booléen*. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact. On note

$$K^r = \{x \in \mathbb{R}^d : B(x, r) \cap K \neq \emptyset\}.$$

1. En utilisant K^r , donner la loi du nombre de boules touchant K

$$N_K := \#\{i : B(x_i, r) \cap K \neq \emptyset\}.$$

2. En déduire la fonctionnelle de capacité du modèle booléen

$$T_{\mathcal{F}}(K) := \mathbb{P}(\mathcal{F} \cap K \neq \emptyset).$$

Donner une formule explicite dans le cas où $d = 2$ et $K = B(0, R)$ pour un certain $R > 0$.

3. On imagine que les x_i représentent les localisations d'arbres dans une forêt (aléatoire), et que chaque tronc d'arbre est de rayon r . Quelle est la probabilité qu'un individu placé au point 0 puisse "voir à l'infini" vers la droite (i.e. selon l'axe des abscisses) ?
4. La probabilité qu'il existe un angle θ aléatoire tel que l'observateur ait une visibilité infinie dans la direction θ est plus compliquée. Quelle est la probabilité qu'il existe un secteur angulaire $]\theta_-, \theta_+[$ non-obstrué ?
5. Quelle est la probabilité qu'il existe un observateur en un autre point (aléatoire) du plan $x \in \mathbb{R}^d$ qui ait une vision infinie à droite ?
6. On suppose désormais que les rayons sont aléatoires, i.e. on suppose qu'on attache à chaque x_i une variable aléatoire R_i tirée selon une loi ν sur \mathbb{R}_+ . Quel est le processus de Poisson marqué correspondant ?
7. Pour K donnée, identifier la loi du cardinal de

$$\mathcal{K} := \{(x_i, R_i) : B(x_i, R_i) \cap K \neq \emptyset\}.$$

8. En déduire la fonctionnelle de capacité de

$$\mathcal{F}' := \cup_i B(x_i, R_i).$$

9. On suppose que ν n'est pas la masse de Dirac en 0 ($\nu \neq \delta_0$). Montrer que comme précédemment aucun observateur n'a de vision à l'infini vers la droite.

10. Montrer que si $\int r^d \nu(dr) = \infty$, $\mathbb{P}(\mathcal{F} \cap K \neq \emptyset) = 1$ pour chaque compact K . En déduire que p.s. $\mathcal{F}' = \mathbb{R}^d$.

2.4 Définition

Définition 10. Soit ν une mesure LF sur \mathbb{R}_+ tel que

$$\int r^d \nu(dr) < \infty. \quad (\text{H})$$

et $\bar{\mathcal{P}} = \{(x_i, r_i); i \geq 1\}$ un PPP marqué de loi PPP($\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathcal{L}^d \times \nu$). On définit le modèle booléen radial de mesure de rayon ν par

$$\mathcal{F} = \cup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i).$$

Exercice 33. Pour $K \subset \mathbb{R}^d$ compact, on note

$$\mathcal{N}_K = \#\{(x, r) \in \bar{\mathcal{P}} : B(x, r) \cap K\} < \infty.$$

On suppose que (H) tient.

1. Montrer que $\mathcal{N}_{B(0,1)}$ suit une loi de Poisson finie.
2. Montrez que pour tout K compact, \mathcal{N}_K suit une loi de Poisson finie.
3. Déduisez-en que \mathcal{F} est un fermé aléatoire.
4. Donnez la fonctionnelle de capacité lorsque $K = B(0, R)$.
5. Pour K quelconque, on note

$$K^{\oplus r} = \{x : d(x, K) \leq r\}.$$

Donnez $T_{\mathcal{F}}(K)$ en fonction de $K^{\oplus r}$.

Définition 11. Soit μ une mesure LF sur \mathbb{R}^d . Soit $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^d$ un espace des marques muni d'une mesure ν et une fonction $F : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{F}$. On considère alors le modèle booléen $MB(\mu; \nu)$

$$\mathcal{F} = \cup_{i=1}^{\infty} (x_i + F(m_i))$$

où

$$\{(x_i, m_i); i \geq 1\} \sim PPP(\mu \times \nu; \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}).$$

Remarque 3. Le modèle booléen radial correspond simplement à $\mathbf{M} = \mathbb{R}_+$ et

$$F(r) = B(0, r).$$

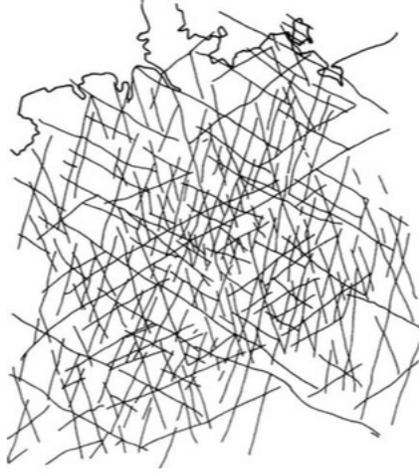
FIGURE 2.1 – *Stochastic geometry and its applications*, Stoyan, Kendall, Mecke

Figure 8.1 Distribution of linear fault zones in Central Europe (from Weber, 1977). The system of lines can be interpreted as a sample of a planar fibre process. A line process could also serve at least as a rough approximation; the pattern can be also interpreted as a sample of a geometrical network. Note that some of the fault zones end at other fault zones – so clearly there is interaction between them. The structure is clearly not isotropic. There are four dominating directions, ENE–WSW, NNE–SSW, NW–SE, ESE–WNW. The apparent lower intensity of fault zones in the northern region of the figure is due to incomplete information about that region. See the statistical analysis of fault lengths in Section 6.6.4, Figure 6.16.

Exercice 34. Soit $\mathbf{M} = [0, 2\pi]$ muni de la loi uniforme et $F(\theta) \subset \mathbb{R}^2$ un segment de longueur 1 et d'inclinaison θ

$$F(\theta) = [0, u_\theta]$$

où

$$u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

1. Calculer $\mathcal{L}^d(F(\theta))^{\oplus r}$.
2. Dessinez $K - F(\theta)$ pour différentes formes K (segment, carré, ellipses, ...) et valeurs de θ .
3. Calculez $\mathbb{E}(K - F(M))$ lorsque K est une boule fermée, puis lorsque K est un segment borné.

Exercice 35. On suppose $\mu = \mathcal{L}^d$.

1. Montrez que \mathcal{N}_K est fini sous l'hypothèse (H)
2. Montrez que \mathcal{F} est alors bien un fermé aléatoire et calculez $T_{\mathcal{F}}(K)$.
3. Calculez la fraction de volume

$$\alpha := \frac{\mathbb{E}(\mathcal{L}^d(\mathcal{F} \cap K))}{\mathcal{L}^d(K)}.$$

Exercice 36. Soit $\mathbf{M} = [0, 2\pi]$ muni de la loi uniforme ν et soit $F(\theta) \subset \mathbb{R}^2$ la droite d'inclinaison θ dans \mathbb{R}^2 .

1. On suppose que μ est la mesure de Lebesgue. Montrez que \mathcal{N}_K est infini pour $K = B(0, 1)$ (ou pour n'importe quel compact d'intérieur non-vidé).

2. On suppose désormais $\mu = \frac{1}{\|x\|^2} dx$. Montrez que \mathcal{N}_K est p.s. fini et déduisez-en que le modèle booléen correspondant \mathcal{F} est un fermé aléatoire.
3. * Montrez que \mathcal{F} est stationnaire, i.e.

$$T_{\mathcal{F}}(K) = T_{\mathcal{F}}(K + x), x \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 37. Soit $\mathcal{P} = \{x_i; i \geq 1\} \sim PPP(1; \mathbb{R}^d)$, et ν une mesure de probabilités sur \mathbb{R}_+ . Soit R_i iid de loi ν .

$$\mathcal{F} = \cup_{i=1}^{\infty} B(x_i, R_i)$$

est le modèle booléen de loi ν .

1. On suppose que les R_i sont bornés par un nombre $a \geq r$. Pour $r > 0$, montrez que

$$N_r := \#\{i : B(x_i, R_i) \cap B(0, r) \neq \emptyset\}.$$

a une loi de Poisson de paramètre λ_a , qu'on exprimera en fonction de ν .

2. On cherche à calculer la loi de N_r sans supposer que les rayons sont bornés. Montrer que N_r est la limite presque sûre quand $a \rightarrow \infty$ de

$$N_{r,a} = \#\{i : B(x_i, \min(R_i, a)) \cap B(0, r) \neq \emptyset\}.$$

Donnez la limite en loi de $N_{r,a}$ et concluez sur le type de loi de N_r .

3. Montrez que $\mathbb{E}(N_r) < \infty$ pour tout $r > 0$ ssi ν a un moment d'ordre d fini.
4. On suppose cette condition remplie, montrer que \mathcal{F} est p.s. fermé, et donnez sa fonctionnelle de capacité.

On suppose implicitement que l'application $m \rightarrow F_m$ est mesurable, et donc les F_i sont des FA. Par contre rien ne garantit que \mathcal{F} est fermé (et donc un FA).

On rappelle que si ν est une mesure de probabilités, la loi de \mathcal{P} peut s'obtenir à partir d'un PPP indépendant $\mathcal{P}' = \{x_i; i \geq 1\} \sim PPP(\mu)$ et d'une famille iid $(M_i)_{i \geq 1}$ de VA de \mathbf{M} de loi ν , avec

$$\mathcal{P} \stackrel{(d)}{=} \{(x_i, F_{M_i}); i \geq 1\}.$$

Le modèle booléen radial s'obtient donc en posant

$$\mathbf{M} = \mathbb{R}_+, F_r = B(0, r)$$

avec ν une mesure sur \mathbb{R}_+

Exemple 9. Pour $\theta \in [0, \pi]$, soit $\ell_\theta = [0, a_\theta]$ le batonnet de longueur 1 d'orientation θ , où

$$a_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

Soit $\mathbf{M} = [0, \pi]$ muni de la distribution uniforme

$$\nu(d\theta) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{\{[0, \pi]\}}(d\theta)$$

et soit $\mathcal{F} \sim MB(\lambda \mathcal{L}^2, \nu)$ sur \mathbb{R}^2 . Alors \mathcal{F} est une union de batonnets d'orientation aléatoire.

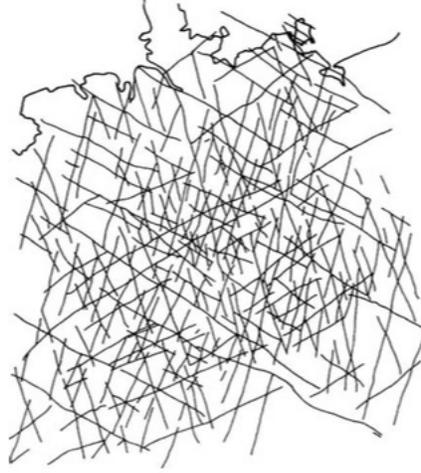
FIGURE 2.2 – *Stochastic geometry and its applications*, Stoyan, Kendall, Mecke

Figure 8.1 Distribution of linear fault zones in Central Europe (from Weber, 1977). The system of lines can be interpreted as a sample of a planar fibre process. A line process could also serve at least as a rough approximation; the pattern can be also interpreted as a sample of a geometrical network. Note that some of the fault zones end at other fault zones – so clearly there is interaction between them. The structure is clearly not isotropic. There are four dominating directions, ENE–WSW, NNE–SSW, NW–SE, ESE–WNW. The apparent lower intensity of fault zones in the northern region of the figure is due to incomplete information about that region. See the statistical analysis of fault lengths in Section 6.6.4, Figure 6.16.

Notation 7. On utilise la notation suivante : pour $A \in \mathbb{F}, B \in \mathbb{F}, r > 0$,

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

$$A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

$$A \oplus r = A + B(0, r) = \{a + b : a \in A, b \in B(0, r)\} = \{a - b : a \in A, b \in B(0, r)\} = \cup_{a \in A} B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, A) \leq r\}.$$

Exemple 10. Pour $r, \rho > 0, x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$B(x, r) \oplus \rho = B(x, r + \rho)$$

$$B(x, r) - B(y, \rho) = B(x - y, r + \rho)$$

Proposition 12. On reprend les notations précédentes. Soit M une marque aléatoire de loi ν . On a pour K compact

$$N_K := \#\{i : (x_i + F_{M_i}) \cap K \neq \emptyset\} \sim \mathcal{P}(\mathbb{E}(\mu(K - F_M)))$$

On suppose que pour $r > 0$

$$\mathbb{E}(\mu(F_M \oplus r)) < \infty, r > 0. \quad (2.1)$$

Alors on dit que ν est admissible, et dans ce cas \mathcal{F} est un fermé aléatoire (on note toujours sa loi $MB(\mu, \nu)$) et pour $K \in \mathbb{K}$,

$$T_{\mathcal{F}}(K) = 1 - \exp(-\mathbb{E}_{\nu}(\mu(K - F_M))).$$

Démonstration. Pour $K \in \mathbb{K}$, il existe $r > 0$ tel que $K \subset B(0, r)$. Donc $N_K < \infty$ si $N_{B(0, r)} < \infty$ mais ça n'est pas forcément une équivalence.

Soit $\mathcal{P} = \{(x_i, F_{M_i})\} \sim PPPM(\mu, \nu)$ et K un compact de \mathbb{K} . On introduit le sous-ensemble de $\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$:

$$\mathcal{A}_K = \{(x, m) : (x + F_m) \cap K \neq \emptyset\}.$$

On a

$$N_K = \#\mathcal{P} \cap \mathcal{A}_K \sim \mathcal{P}(\mu \otimes \nu(\mathcal{A}_K))$$

car \mathcal{P} est un processus de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$ d'intensité $\mu \otimes \nu$. Pour conclure, on applique le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \mu \otimes \nu(\mathcal{A}_K) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}} \mathbf{1}_{\{(x+F_m) \cap K \neq \emptyset\}} \mu(dx) \nu(dm) \\ &= \int_{\mathbf{M}} \mu(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^d : (x + F_m) \cap K \neq \emptyset\}}_{=\{x: \exists y \in F_m, \exists z \in K: x=z-y\}=K-F_m}) \nu(dm) \\ &= \mathbb{E}(\mu(K - F_M)). \end{aligned}$$

Comme par hypothèse,

$$\mathbb{E}(N_{B(0, r)}) = \mathbb{E}(\mu(F_M \oplus r)) < \infty$$

, on a $\mathbb{E}(N_K) < \infty$, $N_K < \infty$ p.s. et il y a p.s. un nombre fini de fermés $x_i + F_i$ qui intersectent K , donc $\mathcal{F} \cap K$ est fermé. En faisant une union sur une quantité dénombrables de compacts $K_n, n \in \mathbb{N}$, qui recouvrent \mathbb{R}^d , on en déduit que \mathcal{F} est "localement fermé" :

$$\mathcal{F} \cap K_n = \cup_i ((x_i + F_{M_i}) \cap K_n) \text{ (union finie de fermés)}$$

Donc \mathcal{F} est p.s. fermé donc c'est un FA. On a alors

$$T_{\mathcal{F}}(K) = \mathbb{P}(\mathcal{F} \cap K \neq \emptyset) = \mathbb{P}(\mathcal{P} \cap \mathcal{A}_K \neq \emptyset) = 1 - \exp(-\mathbb{E}(\mu(K - F_M))).$$

□

Exercice 38. Soit $\mathcal{F} \sim MB_r(\lambda, \nu)$ pour $\lambda > 0$ et ν une mesure de probabilités sur \mathbb{R}_+ qui admet un moment d'ordre d fini. Montrer que \mathcal{F} est bien un FA et calculer sa FdC.

Proposition 13. Pour $\lambda > 0$ et ν admissible, le modèle booléen $\mathcal{F} \sim MB(\lambda, \nu)$ est stationnaire.

Démonstration. On a

$$T_{\mathcal{F}}(K + x) = 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}(\mathcal{L}^d(K + x - F_M))) = 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}(\mathcal{L}^d(K - F_M))) = T_{\mathcal{F}}(K)$$

en utilisant le fait que la mesure de Lebesgue est invariante par translation. □

2.5 Isotropie

Soit \mathcal{R}_d l'ensemble des matrices de rotation de \mathbb{R}^d . Pour $R \in \mathcal{R}_d$, $A \subset \mathbb{R}^d$ on définit

$$R(A) = \{R(x) : x \in A\}.$$

Proposition 14. *Un fermé aléatoire \mathcal{F} de \mathbb{R}^d est isotrope ssi $R(\mathcal{F}) \stackrel{(d)}{=} \mathcal{F}$ pour toute $R \in \mathcal{R}_d$.*

Proposition 15. *1. Pour μ une mesure LF, $\mathcal{P} \sim PPP(\mu)$ est isotrope ssi μ est isotrope, c'est-à-dire*

$$\mu(R(A)) = \mu(A) \text{ pour tout } A \text{ mesurable}$$

Donc \mathcal{P} est stationnaire isotrope ssi $\mu = \lambda \mathcal{L}^d$ pour un $\lambda > 0$.

2. Soit $\mathcal{F} \sim MB(\mu, \nu)$. Alors \mathcal{F} est isotrope ssi μ et ν sont isotropes, c'est-à-dire pour L un FA de loi ν

$$\mathbb{E}_\nu(R(L)) \stackrel{(d)}{=} \mathbb{E}_\nu(L).$$

Donc \mathcal{F} est stationnaire isotrope si $\mu = \lambda \mathcal{L}^d$ et ν est isotrope.

Démonstration. 1. Découle facilement de la forme de la fonctionnelle de capacité $K \mapsto 1 - \exp(-\mu(K))$ et que la mesure de Lebesgue est isotrope.

2. D'après la FdC, il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}(\mu(K - F_M)) = \mathbb{E}(\mu(R(K - F_M))) = \mathbb{E}(\mu(R(K) - R(F_M))) = \mathbb{E}(\mu(R(K) - F_M))$$

car $R(F_M) \stackrel{(d)}{=} F_M$ et

$$R(A - B) = \{r(a - b) : a \in A, b \in B\} = \{r(a) - r(b)\} = R(A) - R(B).$$

donc

$$T_{\mathcal{F}}(K) = 1 - \exp(-\mu(K - F_M)) = 1 - \exp(-\mu(R(K) - F_M)) = T_{\mathcal{F}}(R(K))$$

□

Exemple 11. Tout modèle booléen radial est isotrope si μ est isotrope.

2.6 Fraction de volume

On se place dans le cas stationnaire, i.e. $\mu = \lambda \mathcal{L}^d$ pour un $\lambda > 0$.

Proposition 16. On appelle fraction de volume d'un FA \mathcal{F} le rapport

$$\rho_{\mathcal{F}} := \frac{\mathbb{E}(\mathcal{L}^d(K \cap \mathcal{F}))}{\mathcal{L}^d(K)}$$

qui ne dépend pas de $K \in \mathbb{K}$ (non négligeable). On a

$$\rho_{\mathcal{F}} = \mathbb{P}(0 \in \mathcal{F}).$$

Démonstration. Par stationnarité, $\mathbb{P}(x \in \mathcal{F})$ ne dépend pas de $x \in \mathbb{R}^d$, donc par le théorème de Fubini

$$\mathbb{E}(\mathcal{L}^d(K \cap \mathcal{F})) = \mathbb{E}\left(\int_K \mathbf{1}_{\{x \in \mathcal{F}\}} \mathcal{L}^d(dx)\right) = \int_K \mathbb{P}(x \in \mathcal{F}) dx = \int_K \mathbb{P}(0 \in \mathcal{F}) dx = \mathbb{P}(0 \in \mathcal{F}) \lambda \mathcal{L}^d(K).$$

□

Proposition 17. Soit $\mathcal{F} \sim MB(\lambda, \nu)$ pour ν une mesure admissible sur un ensemble de fermés \mathbf{M} . Alors

$$\rho_{\mathcal{F}} = 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}(\mu(B(0, R))))$$

où $R \sim \nu$.

Démonstration. On a simplement

$$\mathbb{E}(\nu(B(0, R))) = \mathbb{E}(N_{\{0\}}) = \mathbb{E}(N_{B(0,0)}) = \mathbb{E}(\nu(B(0, R+0))).$$

□

Le modèle booléen peut modéliser de nombreux phénomènes naturels (KSM).

- Cratères lunaires
- Mousses, milieux poreux
- Alliages métalliques
- Tumeurs

Pour simuler un tel milieu, il suffit de choisir le paramètre λ (nombre moyen de points par unité de volume), puis la loi μ du grain, ou la loi ν du rayon. Estimer $\lambda, \mu/\nu$ sur un phénomène naturel est une question statistique épineuse.

2.7 TD3

Exercice 1. Donnez un exemple de modèle booléen non-isotrope (avec μ isotrope).

Exercice 2. Soit $\mathbf{M} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}^d\}$ muni d'une mesure de probabilités ν et $\mathcal{F} \sim MB(\lambda, \nu)$. Montrez que $\mathcal{F} \stackrel{(d)}{=} PPP(\lambda)$.

Exercice 3. Explorons le cas de mesures non admissibles. Soit $\mathcal{P} = \{(x_i, R_i)\} \sim PPPM(\lambda, \nu)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathcal{F} = \cup_i B(x_i, R_i) \sim MB_r(\lambda, \nu)$, rappelons que ce n'est pas forcément un FA, mais on peut tout de même considérer certains événements liés à \mathcal{F} .

1. Soit $\bar{\mathcal{F}}$ l'adhérence de \mathcal{F} . Montrer que $\bar{\mathcal{F}}$ est un FA.

- (a) soit K_n l'ensemble formé par tous les points à distance au plus $1/n$ de K . Montrez que c'est un compact
- (b) Exprimez l'évènement $\bar{\mathcal{F}} \cap K \neq \emptyset$ en fonction des K_n .
2. On suppose que ν a un moment d'ordre d infini.
- (a) Montrez que 0 touche p.s. une infinité de boules $B(x_i, R_i)$.
Lisez et comprenez l'énoncé de la proposition 12. Utilisez ça pour donner la loi du nombre de boules qui touche 0. Utilisez l'hypothèse de moment infini.
- (b) Montrez que l'ensemble

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{F}\}$$

est négligeable.

Montrez que $\mathbb{P}(x \in \mathcal{N}) = 0$ pour tout x . Utilisez ensuite le théorème de Fubini pour calculer $\mathbb{E}(\mathcal{L}^2(\mathcal{N}))$

3. (grandes boules) Soit $\alpha < d + 1$ et $\nu(dr) = r^{-\alpha} dr$ sur \mathbb{R}_+^* .
- (a) Montrez que 0 est p.s. dans une infinité de boules de la forme $B(x_i, R_i - \sqrt{d})$ où $R_i \geq \sqrt{d}$.
On pourra introduire la mesure $\tilde{\nu}$ qui est la mesure ν restreinte à $[\sqrt{d}, \infty]$, et le modèle booléen radial associé. Montrer aussi que $\tilde{\nu}$ a également un moment d'ordre d infini et utiliser ce qui a été fait précédemment.
- (b) Montrez que p.s. pour tout $x \in \mathbb{Z}^d, B(x, \sqrt{d}) \subset \mathcal{F}$. Déduisez-en ce que vaut \mathcal{F} , et ce que vaut \mathcal{N} .

Exercice 4. Soit ν une mesure sur \mathbb{R}_+ , et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{1,\nu}$ le modèle booléen associé. On pose $m_p = \int_{\mathbb{R}_+} r^p \nu(dr)$ le moment d'ordre p de ν .

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur ν pour que $\rho_{1,\nu} < 1$.
- On suppose cette condition vérifiée.
 - Montrer qu'il existe une fonction $\tilde{\rho}_2(z), z \in \mathbb{R}^d$, telle que $\rho_2^{\mathcal{F}} = \tilde{\rho}_2(z)$, et donner une expression de $\tilde{\rho}_2$ en fonction de la fonction

$$\varphi(z, R) = \mathcal{L}^d(B(z, R) \cap B(0, R)).$$

Montrer que $\tilde{\rho}_2(z)$ ne dépend que de la norme $\|z\|$.

- Calculer $\lim_{\|x-y\| \rightarrow \infty} \rho_2^{\mathcal{F}}(x, y) - \rho_1^{\mathcal{F}}(x) \rho_1^{\mathcal{F}}(y)$. Que remarque-t-on ?

Chapitre 3

Champs shot noise

3.1 Intégrale stochastique

Définition 12. Pour un processus ponctuel $\mathcal{M} = \{x_i; i \geq 1\}$, on appelle $[\mathcal{M}] = \sum_{i \geq 1} \delta_{x_i}$ la mesure associée. Autrement dit, pour $A \subset \mathbb{R}^d$,

$$[\mathcal{M}](A) = \#\mathcal{M} \cap A.$$

Définition 13. Soit μ une mesure sur $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$. L'application qui à un mesurable $A \subset \mathbb{R}^d$ associe

$$\mu_{\mathcal{M}}(A) := \mathbb{E}[\#A \cap \mathcal{M}] = \mathbb{E}([\mathcal{M}](A))$$

est une mesure qu'on appelle **mesure d'intensité**, ou simplement **intensité**, de \mathcal{M} .

Si $\mathcal{P} \sim PPP(\mu; \mathbb{X})$, alors μ est l'intensité de \mathcal{P} .

Démonstration. $\mu_{\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$ est évident.

Il reste à montrer la σ -additivité. Soit $A_i, i \geq 1$ une suite d'ensembles deux à deux disjoints. On utilise la σ -additivité de $[\mathcal{M}]$ et celle de \mathbb{E} , et le TCM pour la suite croissante de fonctions $\varphi_n(\omega) = \sum_{i=1}^n [\mathcal{M}(\omega)](A_i), n \in \mathbb{N}$:

$$\mu_{\mathcal{M}}(\cup_i A_i) = \mathbb{E}([\mathcal{M}](\cup_i A_i)) = \mathbb{E}\left(\sum_i [\mathcal{M}](A_i)\right) = \sum_i \mathbb{E}([\mathcal{M}](A_i)) = \sum_i \mu_{\mathcal{M}}(A_i).$$

Pour $A \subset \mathbb{R}^d$,

$$\#\mathcal{P} \cap A \sim \mathcal{P}(\mu(A)).$$

Donc l'espérance est le paramètre $\mu(A)$, donc $\mu_{\mathcal{P}}(A) = \mu(A)$.

□

Définition 14. Soit f une fonction positive bi-mesurable $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$, et $\mathcal{M} \in \mathbb{M}$ un ensemble de points. On définit l'intégrale stochastique

$$I_{\mathcal{M}}(f) = \sum_{x \in \mathcal{M}} f(x, \mathcal{M}) = \int f(x, \mathcal{M}) d[\mathcal{M}](x) = \int f(\cdot, \mathcal{M}) d[\mathcal{M}]$$

l'intégrale de f par rapport à $[\mathcal{M}]$. On peut étendre cette définition à f de signe quelconque si $I_{\mathcal{M}}(|f|) < \infty$.

Notation 8. On suppose implicitement que toutes les fonctions considérées sont mesurables, ou bi-mesurables, par rapport à la bonne tribu (produit).

Dans le cas où \mathcal{M} est aléatoire, $I_{\mathcal{M}}$ est une intégrale stochastique. On a alors le résultat suivant pour l'espérance dans le cas où on intègre sur un PPP :

Théorème 5. Soit μ une mesure LF sur \mathbb{R}^d et $\mathcal{P} \sim PPP(\mu)$. Soit $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Alors

$$\mathbb{E}[I_{\mathcal{P}}(f)] = \int \mathbb{E}[f(x, \mathcal{P} \cup \{x\})] d\mu(x).$$

Exemple 12 (Voir exo 9). Supposons que les galaxies sont réparties de manière poissonnienne et homogène dans l'espace, et que chaque galaxie émet un rayonnement électromagnétique en $\frac{C}{1+r^2}$, où r est la distance à la source et C est une constante. Calculer le rayonnement total arrivant sur la Terre. Qu'en pensez-vous ?

Rappel : Changement de coordonnées sphérique pour une fonction radiale. Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Toute fonction s'écrivant $f(x) = g(\|x\|)$ sur \mathbb{R}^d est dite **radiale**. Le changement de coordonnées sphériques sur \mathbb{R}^d nous donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_0^\infty g(r) \sigma_{d-1} dr,$$

où σ_{d-1} est la surface de la sphère-unité de \mathbb{R}^d . On a par exemple $\sigma_1 = 2\pi$, $\sigma_2 = 4\pi$, et avec $g(r) = \mathbf{1}_{\{0 \leq r \leq R\}}$,

$$\mathcal{L}^d(B(0, R)) = \int_{\mathbb{R}^d} g(r) \sigma_2 r^2 dr = 4\pi [r^3/3]_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Preuve du théorème 5. .

La preuve est simple mais il faut avoir quelques connaissances en théorie de la mesure. Commençons par le cas de la fonction élémentaire $f(x, \mathcal{M}) = \mathbf{1}_{\{x \in B\}} \mathbf{1}_{\{\mathcal{M} \cap C = \emptyset\}}$, où B, C sont deux mesurables bornés

de \mathbb{R}^d . Alors

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[I_{\mathcal{P}}(f)] &= \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathcal{P}} \mathbf{1}_{\{x \in B\}} \mathbf{1}_{\{\mathcal{P} \cap C = \emptyset\}} \right] = \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\mathcal{P} \cap C = \emptyset\}} \# |\mathcal{P} \cap B|] \\
 &= \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\mathcal{P} \cap (C) = \emptyset\}} \# |\mathcal{P} \cap (B \setminus C)|] \\
 &= \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\mathcal{P} \cap (C) = \emptyset\}}] \mathbb{E} [\# |\mathcal{P} \cap (B \setminus C)| \mid \mathcal{P} \cap C = \emptyset] \text{ par indépendance spatiale} \\
 &= \exp(-\mu(C)) \mu(B \setminus C).
 \end{aligned}$$

Pour l'autre côté,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[f(x, \mathcal{P} \cup \{x\})] \mu(x) dx &= \int_B \mathbb{P}(\underbrace{(\mathcal{P} \cup \{x\}) \cap C}_{\neq \emptyset \text{ si } x \in C} = \emptyset) \mu(dx) \\
 &= \int_{B \setminus C} \mathbb{P}(\mathcal{P} \cap C = \emptyset) \mu(dx) = \exp(-\mu(C)) \mu(B \setminus C)
 \end{aligned}$$

donc l'égalité est prouvée dans le cas particulier de ce type de fonction élémentaire f .

La stratégie est alors classique en théorie de la mesure :

- Remarquons que cette égalité est linéaire : si la formule est vraie pour deux fonctions f_1, f_2 , alors elle est vraie pour $a_1 f_1 + a_2 f_2$. Elle est donc vraie pour toute combinaison linéaire de fonctions $\sum_i a_i f_i$ de fonctions élémentaires.
- Soit $f(x, \mathcal{M})$ une fonction mesurable positive, et $(f_n(x, \mathcal{M}))_n$ une approximation croissante de f par des fonctions pour lesquelles la formule est vérifiée, c'est-à-dire : Pour $x \in \mathbb{R}^d, \mathcal{M} \in \mathbb{M}$, $f_n(x, \mathcal{M}) \rightarrow f(x, \mathcal{M})$, et c'est une suite croissante. Donc par le théorème de convergence monotone $\mathbb{E}[I_{\mathcal{P}}(f_n)] = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[f_n(x, \mathcal{P} \cup \{x\})] \mu(dx)$.
- En conclusion, la formule est vraie pour toute fonction qui s'écrit comme "limite croissante" de fonctions pour laquelle cette formule est vraie. Et là encore on utilise une autre technique classique : on l'étend d'abord à une classe plus grande de fonctions \mathcal{C}_1 par cette méthode. Puis en utilisant les fonctions de \mathcal{C}_1 on l'étend à une classe encore plus grande \mathcal{C}_2 , et ainsi de suite jusqu'à arriver à la classe \mathcal{C}_k des fonctions mesurables positives. Définissons les classes successives que l'on utilise :
 - Comme les boréliens bornés $B \subset \mathbb{R}^d$ engendrent la famille de tous les boréliens, toute fonction mesurable positive $g(x); x \in \mathbb{R}^d$, peut s'obtenir comme limite croissante de combinaisons linéaires $\sum_i a_i \mathbf{1}_{\{x \in B_i\}}$ de fonctions indicatrices. L'égalité s'étend donc à la classe \mathcal{C}^1 de toutes les fonctions de la forme $g(x) \mathbf{1}_{\{C \cap \mathcal{M} = \emptyset\}}$, pour g mesurable positive et C mesurable.
 - De même, la tribu sur l'ensemble \mathbb{M} des mesures ponctuelles est générée par les fonctions $\psi_C : \mathcal{M} \mapsto (\mathcal{M} \cap C = \emptyset)$, donc toute fonction mesurable positive $\varphi(\mathcal{M}), \mathcal{M} \in \mathbb{M}$ est une limite croissante de combinaisons linéaires d'indicatrices $\mathcal{M} \mapsto \sum_i \mathbf{1}_{\{C_i \cap \mathcal{M} = \emptyset\}}$. On arrive à la classe \mathcal{C}_2 des fonctions $f(x) \varphi(\mathcal{M})$ pour g, φ mesurables positives sur \mathbb{R}^d et \mathbb{M} .
 - La tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{M})$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ est générée par les ensembles produits, donc toute fonction $f(x, \mathcal{M})$ peut-être écrite comme limite croissante de combinaisons linéaires de fonctions séparables $\sum_i a_i g_i(x) \varphi_i(\mathcal{M})$.

Alors par le TCM la relation est vraie pour f .

□

Pour les fonctions de signe quelconque il faut faire attention à l'intégrabilité.

Corollaire 2. Soit $\mu : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ LF, $\mathcal{P} \sim PPP(\mu; \mathbb{X})$. Soit L_μ^1 l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(|f(x, \mathcal{P} \cup \{x\})|) \mu(dx) < \infty.$$

Alors $I_{\mathcal{P}}(f)$ est p.s. bien définie, a une espérance finie, et la relation

$$\mathbb{E}(I_{\mathcal{P}}(f)) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(f(x, \mathcal{P} \cup \{x\})) \mu(dx)$$

est encore vérifiée.

Démonstration. Il suffit de le montrer pour $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = -\min(f, 0)$, puis pour $f = f^+ - f^-$. \square

Exemple 13. Soit A un ensemble tel que $\mathcal{L}^d(A) < \infty$, et $f(x) = \mathbf{1}_{\{A\}}(x)$ (remarquons que f ne dépend pas de \mathcal{M}). Alors pour $\mathcal{P} \sim PPP(\mu)$

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in X} f(x) \right] = \int_A \mu(dx) = \mu(A).$$

C'est une autre manière de calculer la mesure d'intensité.

Exercice 5. On suppose toujours $\mathcal{P} \sim PPP(\mu)$ où μ est LF. Soit $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \neq y \in \mathcal{P}} f(x, y; \mathcal{P}) \right] = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x, y; \mathcal{P} \cup \{x, y\}) \mu(dx) \mu(dy).$$

On utilisera la fonction $g(x; \mathcal{M}) = \sum_{y \in \mathcal{M} \setminus \{x\}} f(x, y; \mathcal{M})$, $x \in \mathbb{R}^d$.

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 18. On suppose toujours $\mathcal{P} \sim PPP(\mu)$ où μ est LF. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ dans L^1_{μ} . Alors

$$\text{Var}(I_{\mathcal{P}}(f)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^2 \mu(dx) \in [0, +\infty].$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left[\sum_{x \in X} f(x) \right]^2 \right) &= \mathbb{E} \left[\sum_{x \in X} f(x)^2 + \sum_{x \neq y \in X} f(x) f(y) \right] \\ &= \mathbb{E}(I_{\mathcal{P}}(f^2)) + \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x) f(y) \mu(dx) \mu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^2 \mu(dx) + \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu(dx) \right)^2 \end{aligned}$$

par le théorème de Fubini. Et donc

$$\text{Var}(I_{\mathcal{P}}(f)) = \mathbb{E}I_{\mathcal{P}}(f)^2 - (\mathbb{E}I_{\mathcal{P}}(f))^2 = \int f^2 + (\int f)^2 - (\int f)^2 = \int f^2$$

□

La manière la plus simple de donner la loi de $I_{\mathcal{P}}(f)$ est via sa fonction caractéristique.

Proposition 19. Soit μ LF sur \mathbb{R}^d . Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}|I_{\mathcal{P}}(\varphi)| < \infty$. Alors

$$\mathbb{E}(\exp(iI_{\mathcal{P}}(\varphi))) = \exp \left[\int_{\mathbb{R}^d} (\exp(i\varphi(x)) - 1) \mu(dx) \right].$$

Comme pour $t \in \mathbb{R}$, $I_{\mathcal{P}}(t\varphi) = tI_{\mathcal{P}}(\varphi)$, ce résultat peut être utilisé pour caractériser la loi via la fonction caractéristique :

$$\mathbb{E}(\exp(itI_{\mathcal{P}}(\varphi))) = \mathbb{E}(\exp(iI_{\mathcal{P}}(t\varphi))) = \exp \left[\int_{\mathbb{R}^d} (\exp(it\varphi(x)) - 1) \mu(dx) \right], t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Exercice ci-dessous. □

- Exercice 6.**
1. Le montrer lorsque φ prend comme valeurs uniquement 0 ou 1.
 2. Soit φ, φ' deux fonctions telles que $\varphi\varphi' = 0$ sur \mathbb{R}^d , et telle que la relation soit vraie pour φ et φ' . Montrer que la relation est vraie pour $\varphi + \varphi'$
 3. En déduire que la relation est vraie pour φ une fonction étagée, puis pour une fonction intégrable quelconque.

Exercice 7. Retrouvez la question 1 de l'exercice précédent.

3.2 Modèle shot-noise

Définition 15. On introduit la classe CM^1 des fonctions LCM (localement continues par morceaux) et intégrables, constituée des fonctions $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe $q \geq 1$, des fonctions continues $g_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continues et intégrables et des boréliens A_i tels que

$$g(x) = \sum_{i=1}^q \mathbf{1}_{\{A_i\}} g_i.$$

Remarquons que CM^1 contient la classe des fonctions continues et intégrables. On munit CM^1 de la tribu engendrée par les fonctions

$$\varphi_{x_1, \dots, x_p} : \text{CM}^1 \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(x_1, \dots, x_p).$$

Définition 16. Prenons un processus de Poisson marqué avec les caractéristiques suivantes :

- Une mesure μ LF sur \mathbb{R}^d ,
- $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^p$ pour un certain $p \geq 1$ Borélien muni d'une mesure LF ν , et $\tilde{\mathbf{M}} = \{g_m; m \in \mathbf{M}\} \subset \mathbb{C}\mathbf{M}^1$ des fonctions LCM indexées par \mathbf{M} .

On considère le processus marqué $\mathcal{P} = \{(x_i, m_i)\} \sim PPPM(\mu, \nu)$. Alors on introduit le champ “shot noise” $f \in \mathbb{C}\mathbf{M}^1$

$$f(x) = \sum_{z=(y,m) \in \mathcal{P}} g_m(x-y) = \sum_{i \geq 1} g_{m_i}(x-x_i).$$

On note sa loi $SN(\mu, \nu)$.

- Exemple 14.**
1. Modélisation d'un champ gravitationnel, ou électromagnétique (cf. article “gravitationnal allocation to Poisson points”, proposé comme projet).
 2. Signal/bruit émis par des relais de télécommunication
 3. Potentiel électrique de la membrane d'un neurone qui reçoit des potentiels d'action d'autres neurones.

Il faut s'assurer que la somme est absolument convergente pour que le champ soit bien défini. Remarquons que la somme définissant le champ est également bien définie si les fonctions $g \in \mathbf{M}$ sont positives (mais la valeur du champ peut être infinie).

On va considérer dans la suite des champs stationnaires.

Proposition 20. Le champ shot noise $f \sim SN(\mu, \nu)$ est stationnaire ssi les distributions fini-dimensionnelles ont une loi invariante par translation : pour $x_1, \dots, x_q \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, les vecteurs aléatoires

$$(f(x_1), \dots, f(x_q)) \stackrel{(d)}{=} (f(x_1+x), \dots, f(x_q+x))$$

ont même loi.

Proposition 21. Soit $M \sim \nu$. Le champ $f \sim SN(\mu, \nu)$ est stationnaire ssi $\mu = \lambda \mathcal{L}^d$ pour un $\lambda \geq 0$. On définit

$$I_k(\nu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}} \mathbb{E}(g_M(x)^k) dx.$$

Le champ est bien si $\tilde{\mathbf{M}}$ est constitué de fonctions positives ou si

$$I_1(|\nu|) < \infty.$$

On a alors pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}(f(x)) = \lambda I_1(\varphi).$$

$$V(f(x)) = \lambda I_2(\varphi) \in [0, \infty]$$

$$\mathbb{E}(\exp(itf(x))) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}} (\exp(itg_m(x)) - 1) dx \nu(dm), t \in \mathbb{R}.$$

On remarque que cette espérance ne dépend pas de x . C'est une conséquence de la stationarité de f :

Démonstration. Calculons l'espérance de la valeur de $f(x), x \in \mathbb{R}^d$, en remarquant que c'est l'intégrale stochastique de $\varphi(m, y) = g_m(x - y)$ contre la mesure $[\mathcal{P}]$, bien définie si $\varphi \geq 0$ ou si φ est intégrable.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(x) &= \mathbb{E}I_{\mathcal{P}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}} \varphi(m, y) \mu(dy) \nu(dm) \\ &= \int_{\mathbf{M}} \left[\int_{\mathbb{R}^d} g_m(x - y) \lambda dy \right] \mu(dm) = \int_{\mathbf{M}} \left[\int_{\mathbb{R}^d} g_m(y) \lambda dy \right] \mu(dm) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbf{M}} g_m(y) \mu(dm) \right] dy = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}g_M(y) dy \end{aligned}$$

où M a la loi ν . La variance et la fonction caractéristique se traitent de la même manière. □

Exercice 8. Soit $\mathcal{P} = \{x_i\} \sim PPP(\lambda), \beta > 0$ et $L_i, i \geq 1$ une famille de variables iid. Soit

$$h(x) = \frac{1}{(1 + \|x\|)^\beta}.$$

On pose

$$f_\lambda(x) = \sum_{i \geq 1} L_i h(x - x_i).$$

1. Montrer que f_λ est un champ shot-noise en donnant \mathbf{M} et ν .
2. Donner des conditions nécessaires sur β et la loi des L_i pour être sûr d'avoir $f(x) < \infty$ p.s.

Exercice 9. Soit $\mathbf{M} = \mathbb{R}_+$, et ν une probabilité sur \mathbb{R}_+ . Soit $\mathcal{P} = \{(x_i, m_i)\}$ le processus marqué correspondant. Soit f le champ aléatoire

$$f(x) = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{\{x \in B(x_i, m_i)\}}.$$

1. Montrer que f est un champ shot-noise. Quelle est la loi de $f(x)$? Sa moyenne?
2. Soit $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq 1\}$. Montrer que \mathcal{F} est un FA et a la même loi qu'un modèle booléen bien choisi. Donner sa fraction de volume.

3.3 Limite gaussienne

Lorsque la fréquence λ tend vers l'infini, il y a de plus en plus de contributions, $f_\lambda(x) \rightarrow \infty, \mathbb{E}f_\lambda(x) \rightarrow \infty$. Pour pouvoir observer quelque chose, il faut renormaliser : on considère

$$\tilde{f}_\lambda(x) = \frac{f_\lambda(x) - \mathbb{E}f_\lambda(x)}{\sqrt{\text{Var}(f_\lambda(x))}}.$$

On observe alors un champ aléatoire qui n'a plus l'apparence discrète d'un shot-noise de faible intensité : Ce type de modèle peut être utilisé pour modéliser des textures en analyse d'images, ou d'autres champs aléatoires irréguliers.

Théorème 6. On suppose que $I_1(\varphi) < \infty, I_2(\varphi) < \infty$. Lorsque $\lambda \rightarrow \infty$,

$$\frac{f_\lambda(x) - \lambda I_1(\nu)}{\sqrt{\lambda I_2(\nu)}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

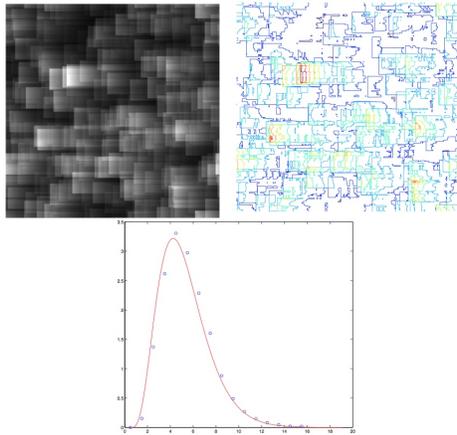


FIG 2. On this figure we show a sample of the shot noise random field of example 9 (exponential in the horizontal direction, with random amplitudes). The sample here (left image) is shown on the square domain $(0, 10)^2$ and we have taken $\lambda = 4$. In the middle we show the boundaries of some of the excursion sets. And on the right we plot the empirical distribution of the perimeter of some excursion sets as a function of the level (blue circles), together with the expected values of these perimeters (red curve) given by Formula (3.10).

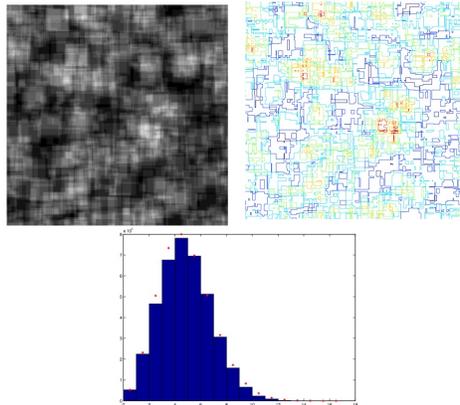


FIG 1. We show here on the left a sample (in the square domain $(0, 2000)^2$) of a shot noise process made of two indicator functions of squares of respective side length 60 and 200, and with respective probability 1/2; with a Poisson point process intensity $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$. In the middle we show the boundaries of some of the excursion sets. And on the right we plot the empirical distribution of the perimeter of the excursion sets as a function of the level, together with the expected values of these perimeters (red stars).

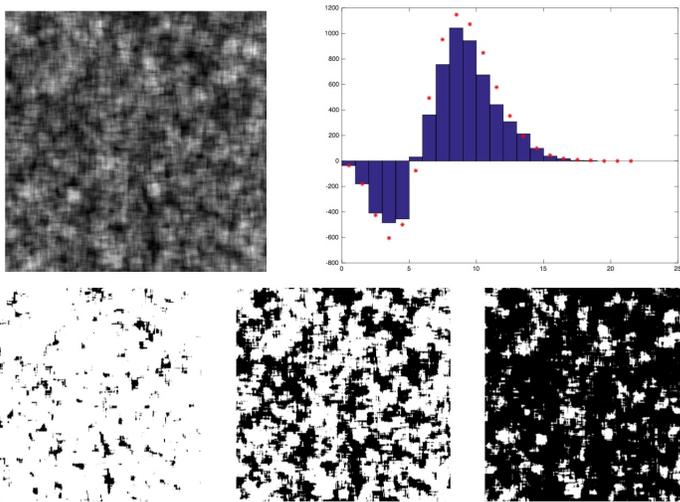


FIGURE 4. Shot noise random field with indicator functions of random squares. This sample has been on a domain of size 2000×2000 pixels, a Poisson point process of intensity $\lambda = 0.001$, and random squares of side length $R = 50$ or $R = 100$ (each with probability 0.5). Top right figure: empirical Euler Characteristic as a function of the level t , compared with the theoretical value (red stars) of Equation (30). Bottom line: Three excursion sets corresponding respectively from left to right to the level $t = 4$, $t = 6$ (that is the “critical level” where the Euler Characteristic turns from negative to positive) and $t = 9$.

Démonstration. (esquisse de preuve) Supposons tout d'abord $I_1 = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \exp(it\tilde{f}_\lambda(x)) &= \exp \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}} \left[\exp \left(\frac{itg(y-x)}{\sqrt{\lambda I_2}} \right) - 1 \right] \lambda dx \nu(dg) - it \frac{\lambda I_1}{\sqrt{\lambda I_2}} \right] \\
&= \exp \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}} \left[1 + \frac{itg(y-x)}{\sqrt{\lambda I_2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{itg(y-x)}{\sqrt{\lambda I_2}} \right)^2 + o \left(\frac{|t|^2 g(y-x)^2}{\lambda I_2} \right) - 1 \right] \lambda dx \nu(dg) - it \frac{\lambda I_1}{\sqrt{\lambda I_2}} \right] \\
&= \exp \left[\frac{it\sqrt{\lambda}}{\sqrt{I_2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}} g(y-x) dx \nu(dg)}_{I_1} - it \frac{\sqrt{\lambda} I_1}{\sqrt{I_2}} - \frac{t^2}{2\lambda I_2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}} g(y-x)^2 \lambda dx \nu(dg)}_{I_2} + \lambda o(\lambda^{-1}) \right] \\
&= \exp \left[-t^2/2 + o(1) \right] \rightarrow \mathbb{E}(\exp(itX))
\end{aligned}$$

où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Donc $\tilde{f}_\lambda(x) \rightarrow X$ en loi. (on a éludé les aventures du “o(...)”)

□