Calcul différentiel et systèmes dynamiques
Travaux dirigés

Raphael Lachieze-Rey[1]

5 décembre 2023

1. raphael.lachieze-rey@math.cnrs.fr

Table des matières

Pour les corrigés, écrire à raphael [at] lachieze-rey.math.cnrs.fr

TD0 - Rappels

Exercice 1. Soit f, g des applications linéaires continues, et u un vecteur qui tend vers 0 dans un espace approprié. Indiquez dans chaque cas l'espace d'appartenance des $o(...)$, des $\|\cdot\|$, des $|||\cdot|||$, des ε. Montrez très précisément avec des applications $\varepsilon_{...}(\cdot)$les assertions demandées (ou complétez-les) :

1. ⚠$o(u) + o(u) = o(u)$ de E vers F
2. ⚠$(f(u) + o(u))(g(u) + o(u)) = f(u)g(u) + o(u^2)$ avec $f, g : E \to \mathbb{R}$.
3. ⚠$\langle f(u) + o(u), g(u) + o(u)\rangle = (???) + o(u^2)$ où $f, g : E \to F$ et F muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle$
4. $f(g(u) + o(u)) = f(g(u)) + o(u)$ $g : E \to F, f : F \to G$
5. $(f + o(u))(g(u) + o(u)) = (???)$ où $g : E \to F, f : F \to G$ (toutes les applications considérées sont linéaires continues)
6. $(f + o(u))((g + o(u))(u) = f(g(u)) + o(u^2)$. (notations allégées acceptées.)

Exercice 2. Démontrer l'équivalence des normes suivantes de $\mathbb{R}^n$:

$$|x|_2 = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2},\ |x|_\infty = \sup_{i=1}^n |x_i|,\ |x|_1 = \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Exercice 3. On considère l'ensemble E formé par les fonctions f de $\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ qui vérifient $f(0) = 0$. Pour tout f de E, on pose :

$$N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|,\ \ N_2(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)|.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes de E.
3. Soit f dans E. On considère la fonction $g(x) = e^x f(x)$. Pour tout x, montrer que $|g(x)| \leq eN_2(f)$ et que $|g'(x)| \leq eN_2(f)$.
4. En déduire que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Exercice 4. Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|dt$.

1. Soit ϕ définie et bornée sur $[0,1]$. Montrer que l'application $f : x \to \int_0^1 \phi(t)x(t)dt$ est une forme linéaire continue sur E.
2. Montrer qu'avec $\phi(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ l'application f n'est pas continue. On pourra considérer les fonctions $x_n(t) = 2n^2(\frac{1}{n} - t)$ sur $[0, 1/n]$ et 0 ailleurs.
3. Montrer que la norme $|x|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ n'est pas équivalente à la norme $\|\cdot\|$. On pourra utiliser les fonctions $x_n(t) = -nt + 1$ sur $[0, 1/n]$ et 0 ailleurs.

Exercice 5. Soit l'espace $\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $N(f) = \sup_{[0,1]} |f(x)| + \sup_{[0,1]} |f'(x)|$.

1. Soit l'application linéaire ϕ de $\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ qui à f associe f'. Montrer que ϕ est continue. Calculer sa norme en utilisant la fonction $f_n(x) = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)$.

2. Pour $f \in \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$, on pose $\psi f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que ψ est une application linéaire continue de $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$. Calculer sa norme.

Exercice 6. Soient E_1, E_2 et E_3 trois espaces vectoriels normés. On note $F = \mathscr{L}(E_1,E_2)$, $G = \mathscr{L}(E_2,E_3)$, $H = \mathscr{L}(E_1,E_3)$. Montrer que l'application ϕ de $F \times G$ dans H qui à (f,g) associe $g \circ f$ est bilinéaire continue.

Exercice 7. On munit l'espace $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. L'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & E^3 & \to & \mathbb{R}, \\ & (f,g,h) & \mapsto & \int_0^1 f(x)\,g(x)\,h(x)\,dx, \end{array}$$

est-elle continue ?

Exercice 8. On note l_∞ l'espace des suites réélles bornées normé par $\|\cdot\|_\infty$.

1. Soit $a = (a_n)$ une suité réélle. Former une condition nécessaire et suffisante sur la suite a pour que l'application

$$N_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n |x_n|$$

définisse une norme sur l_∞.

2. Montrer que N_a et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas equivalentes.

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on pose

$$\mid P \mid_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \ \mid P \mid_\infty = \max\{|a_0|,\cdots,|a_n|\} \ \text{ et } \ \mid P \mid_\star = \max_{t\in[0,1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que ce sont des normes.
2. Montrer qu'elles ne sont pas deux à deux équivalentes. On considérera les polynômes $P_n(t) = (t-1)^n$ et $Q_n(t) = 1 + t + \cdots + t^n$.
3. Vérifier que les normes sont équivalentes dans $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.
4. Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$, l'application qui à $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ associe $\phi(P) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Etudier la continuité de ϕ pour chacune des normes.
5. Etudier la continuité de la restriction de ϕ à E_n.

Exercice 10. Soit $E = \mathscr{M}$ l'espace vectoriel formé par les matrices de taille $m \times n$.On définit

$$\|A\|_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une norme et que $\|A\|_0^2 = \mathrm{tr}(A^t A)$.
2. Montrer que si A et B sont deux matrices de formats respectifs $m \times n$ et $n \times p$, alors :

$$\|AB\|_0 \le \|A\|_0 \|B\|_0.$$

3. On note $\|\cdot\|_2$ la norme matricielle induite par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$. Montrer que

$$\forall\, A \in E,\ \|A\|_2 \le \|A\|_0 \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

Exercice 11. On considère l'espace vectoriel E des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,2\pi]$ qui vérifient : $\forall f \in E, f(0) = f'(0) = 0$. On pose : $\forall f \in E$,

$$N_1(f) = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,2\pi]} |f''(x)|,$$
$$N_2(f) = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x) + f''(x)|,$$
$$N(f) = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|.$$

1. Montrer que N_1, N_2 et N sont des normes de E.
2. On pose $f(x) = \lambda(x)\cos x + \beta(x)\sin x$ avec λ et μ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,2\pi]$.
   — Exprimer λ et μ ainsi que leurs dérivées λ' et μ' en fonction de f et de ses dérivées.
   — Trouver une majoration de λ et μ par $N_2(f)$.
   — En déduire que N_1 et N_2 sont équivalentes.
3. En considérant la fonction $f_n(x) = (\frac{x}{2\pi})^n$, montrer que N et N_1 ne sont pas équivalentes.

Exercice 12. On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^2([0,1];\mathbb{R})$. Pour tout f de E, on pose

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, N'_\infty(f) = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|, N''_\infty(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|.$$

1. Montrer que N_∞, N'_∞ et N''_∞ sont des normes de E.
2. Montrer que ces normes ne sont pas deux à deux équivalentes.

TD1 - Différentielle

Exercice 1. ⚠Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On note $E_0 = E\setminus\{0\}$.

1. Montrer que l'application
$$f: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle x,x\rangle \end{array}$$
est différentiable et calculer sa différentielle.
2. En déduire que l'application
$$g: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$
est différentiable sur E_0.
3. Montrer que g n'est pas différentiable en 0.
4. Soit $u : E \to E$ une application différentiable sur E. Trouver le domaine de différentiabilité des applications
$$h_1: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle u(x),u(x)\rangle \end{array} \quad \text{et} \quad h_2: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|u(x)\| \end{array}$$
et calculer leur différentielle lorsqu'elle existe.

Exercice 2. ⚠On considère un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$.

1. Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to E$ deux applications différentiables sur E. Montrer que l'application définie pour tout x de E par $h(x) = f(x)g(x)$ est différentiable et calculer sa différentielle en fonction de celles de f et g.
2. On suppose que la norme dérive d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Calculer la différentielle de l'application
$$h: \begin{array}{ccc} E\setminus\{0\} & \to & E\setminus\{0\} \\ x & \mapsto & \frac{x}{\|x\|} \end{array}.$$

Exercice 3. (Théorème d'Euler). Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On considère une application $f : E \to F$ différentiable et homogène de degré n, c'est à dire vérifiant la propriété
$$\forall t \in R, \forall x \in E, f(tx) = t^n f(x).$$
Montrer que pour tout x de E, $df_x(x) = nf(x)$. Le vérifier pour $f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{si } x^2+y^2 \neq 0,\ f(0,0) = 0, \text{sinon.}$$

1. ⚠Lorsque cela est possible, calculer les dérivées partielles de f.
2. ⚠Etudier la différentiabilité de f.
3. Mêmes questions avec

$$g(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}, +\text{si } x^2+y^2 \neq 0,\ g(0,0) = 0, \text{sinon.}$$

$$h(x,y) = \frac{x^3 y^3}{x^2+y^2}, \text{si } x^2+y^2 \neq 0,\ h(0,0) = 0, \text{sinon.}$$

Exercice 5. On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \text{si } x^2+y^2 \neq 0,\ f(0,0) = 0,\ \text{sinon.}$$

Etudier la continuité de f et calculer les dérivées partielles d'ordre 1. Etudier la continuité des dérivées partielles en $(0,0)$. L'application f est-elle différentiable ?

Exercice 6. Soit $p \geqslant 0$. Soit f_p l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_p(x,y) = \begin{cases} (x+y)^p \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Calculer $f_p(h_n)$ où $h_n = \left(\frac{1}{(\pi n + \pi/2)}, 0\right)$, et sa limite en fonction de p.
2. Donnez des exemples d'applications continues f et g de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{h\to 0} f(h) \text{ n'existe pas, } \lim_{h\to 0} g(h) \text{ n'existe pas, } , \lim_{h\to 0} f(h)g(h) \text{ existe.}$$

3. ⚠Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $p > 0$.
4. ⚠Montrer que f est différentiable si et seulement si $p > 1$.
5. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si $p > 2$.

Exercice 7. On considère les applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (1+x^2+y^2, 1+x^2+y^2) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \to & \begin{cases} 0, & \text{si } uv = 0 \\ 1, & \text{si } uv \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Etablir le domaine d'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de g.
2. Etudier la différentiabilité de g.
3. Etudier la différentiabilité de $g \circ f$.

Exercice 8. Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(\theta, \phi) = (a\cos\theta\cos\phi, b\cos\theta\sin\phi, c\sin\theta),$$

où a, b et c sont fixés dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer la matrice jacobienne de f en $(\pi/4, \pi/4)$. Calculer le rang de $df_{(\pi/4,\pi/4)}$ et donner une base de $\text{Im}(f'(\pi/4, \pi/4))$.

TD2 - Inégalité des accroissements finis

Exercice 1. ⚠ Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ différentiable en $(0,0)$. On définit

$$F:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \to & (f(y,z),f(z,x),f(x,y))\end{array}$$

Montrer que F est différentiable en $(0,0,0)$. Exprimer la matrice jacobienne de F en $(0,0,0)$ et son jacobien.

Exercice 2. Soient deux applications $f:U\to\mathbb{R}^q$ et $g:V\to\mathbb{R}^m$, définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et un ouvert V de $\mathbb{R}^q$ tel que $f(U)\subset V$. On considère l'application $h=g\circ f$ sur U. Montrer que

$$\forall a\in U,\ J_h(a)=J_g(f(a))\,J_f(a).$$

et exprimer les dérivées partielles de h en fonction de celles de f et g.

Exercice 3. ⚠On se place dans l'espace vectoriel $E=\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $|f|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

1. Soit ψ une fonction définie sur $[0,1]$ et bornée. Montrer que

$$\varphi: f\in E\mapsto \int_0^1 \psi(x)f(x)dx\in\mathbb{R}$$

est différentiable et calculer sa différentielle.

2. Soit ψ une fonction deux fois dérivables et à dérivée seconde bornée. Montrer que

$$\varphi: f\in E\mapsto \int_0^1 \psi(f(x))dx\in\mathbb{R}$$

est différentiable et calculer sa différentielle. L'application φ est-elle de classe C^1 ?

Exercice 4. Soit $(\mathscr{M},|\cdot|)$ l'espace des matrices carrées de taille n que l'on munit d'une norme matricielle.

1. ⚠Montrer que les applications suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle.

$$f_1:\begin{array}{rcl}\mathscr{M} & \to & \mathscr{M}\\ X & \mapsto & X^2\end{array}\quad\text{et}\quad f_2:\begin{array}{rcl}\mathscr{M} & \to & \mathscr{M}\\ X & \mapsto & X^TX\end{array}.$$

2. ⚠Montrer que l'application

$$h:\begin{array}{rcl}\mathscr{M}\times\mathscr{M} & \to & \mathscr{M}\\ (A,B) & \mapsto & AB\end{array}$$

est différentiable et exprimer sa différentielle.

3. Montrer que l'application

$$g:\begin{array}{rcl}\mathscr{M} & \to & \mathscr{M}\\ X & \mapsto & X^k\end{array}.$$

définie pour $k\in\mathbb{N}^\star$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 5. Soit $E = l_1$ l'espace des suites absolument convergentes muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. On définit l'application f sur $E\times E$ qui à (x,y) associe la suite z de terme général $z_n = x_0y_n + x_1y_{n-1} + \cdots + x_ny_0$.

1. ⚠Montrer que f est à valeurs dans E et est une application bilinéaire continue.
2. ⚠En déduire que $g : x \in E \mapsto f(x,x)$ est $\mathscr{C}^1$ et calculer sa différentielle.

2 bis : Montrer que g est $\mathscr{C}^\infty$, donnez $d^k g$ epour $k \geqslant 2$.

3. On considère l'application $\varphi : x \in E \mapsto \|x\|_1$. On veut montrer que φ n'est différentiable en aucun point $x \in E$.
   (a) Le montrer pour $x \in E$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = 0$.
   (b) Soit $x \in E$ tel que $x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons que φ soit différentiable en x. Calculer $d\varphi_x$ à l'aide des suites $\delta_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, où
   $$\delta_n = (0,\dots,0,\underbrace{1}_{n},0,\dots).$$
   (c) Montre que φ n'est pas différentiable en x à l'aide des $h_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$ où $h_n = -2x_n\delta_n$.

Exercice 6. Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ défini par $f(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$.

1. Montrer que f est continue et différentiable
2. L'application f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?
3. Mêmes questions avec l'application de $]-1,1[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n\cos(ny)}{\sqrt{n}}$.

Exercice 7. Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrés à coefficients réels.

1. Soit $H \in E$. Montrer que $\det(H+\lambda I)$ est un polynôme en λ de degré n. Calculer les coefficients de λ^n et λ^{n-1}.
2. Soit $H \in E$ et $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (espace des matrices inversibles). On pose $\phi(t) = \det(A+tH)$. Montrer que ϕ est dérivable et que $\phi'(0) = \det A \,\mathrm{trace}(A^{-1}H)$.
3. En déduire que la différentielle au point $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ de $\det : E \to \mathbb{R}$ vaut $\det(A)\,\mathrm{trace}(A^{-1}H)$.

Exercice 8. ⚠Soit $n \geq 1$ et

$$\begin{aligned}\varphi :\ & \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ & (P,x) \mapsto P(x)\end{aligned}$$

Calculer les dérivées partielles de φ par rapport aux coordonnées P et x.

Exercice 9. Soit Ω l'ensemble des matrices inversibles sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que Ω est un ouvert.
2. Soit $\varphi(A) = A^{-1}$ sur Ω. En utilisant l'application $\psi(A) = A$, montrer que φ est différentiable et donner sa différentielle.

Exercice 10. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Etudier la différentiabilité de

$$\begin{array}{rccc} g: & E & \to & \mathbb{R}\\ & P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \sin(tP(t))\,dt.\end{array}$$

Exercice 11. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que l'application

$$N: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times E & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \sqrt{|t|^2+\|x\|^2}. \end{array}.$$

   est une norme de l'espace produit $\mathbb{R}\times E$.

2. Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:E\to E$ deux applications différentiables sur E. Montrer que l'application définie pour tout (t,x) de $\mathbb{R}\times E$ par $h(t,x)=f(t)g(x)$ est différentiable et calculer sa différentielle en fonction de celles de f et g.

3. Calculer la différentielle de l'application

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star\times E & \to & E \\ (t,x) & \mapsto & \dfrac{x}{t} \end{array}.$$

Exercice 12. Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des pôlynomes de degré inférieur à n muni de la base $(X^k)_{k=0}^n$. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer les différentielles partielles de l'application

$$\phi: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \to & \int_0^1 f(t,P(t))dt. \end{array}$$

ϕ est-elle différentiable?

Exercice 13 (Réciproque de la différentiabilité sur un espace produit)**.** Soit $E=E_1\times\cdots\times E_n$ un produit d'evn, Ω_i un ouvert de E_i pour chaque $1\leqslant i\leqslant n$, $\Omega=\Omega_1\times\cdots\times\Omega_n$ un ouvert de E. On suppose que pour tout $1\leqslant i\leqslant n$, pour $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega$, l'application

$$f_{[i]}:y\to f(x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

est de classe $\mathscr{C}^1:\Omega_i\to F$ en x_i. On souhaite montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, de différentielle

$$df_x(h)=\ell(h):=\sum_{i=1}^n df_{[i]}(h_i)$$

pour $x=(x_i)_i\in\Omega, h=(h_i)_i\in E$.

1. Montrer que ℓ est bien linéaire continue (de quoi vers quoi?).
2. On va montrer le résultat par récurrence sur n.
   (a) Le montrer pour $n=1$.
   (b) On suppose la propriété vraie au rang $n-1$. Soit $y\in\Omega_n, x,h\in E$. On pose pour $\|h\|$ suffisament petit

$$g(y)=f(x_1+h_1,\ldots,x_{n-1}+h_{n-1},y)$$
$$\tilde{f}(y_1,\ldots,y_{n-1})=f(y_1,\ldots,y_{n-1},x_n),y_1,\in,y_{n-1}\in E.$$

   Exprimez $f(x+h)-f(x)-\ell(h)$ en fonction de $g,\tilde{f}$ et $o(h)$.

   (c) Montrez que g est de classe $\mathscr{C}^1$ en x et que pour $\eta>0$ il existe $r>0$ tel que pour $\|h\|\leqslant r, y\in B(x,r)$,

$$|||dg_y|||_{E_n,F}\leqslant\eta.$$

   (d) Conclusion.

TD3 - Recherche d'extrema

Exercice 1. ⚠Dans tous les cas suivants, donner $d^k f_0(h^k)$ pour $h \in E, k \geqslant 1$, et dire si 0 est un minimum ou un maximum local.

1. $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + xy^2$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.
2. $f(x,y) = -x^2 - 3y^2 - 4y^4$
3. $f(x,y) = x^2 - 3y^2 - x^5$.
4. $f(x,y) = x^2 + 6y^2 - 4xy + y^5$
5. $f(x,y) = x + y + x^2 + y^2 + x^3$.
6. $f(x,y) = -x^4 - 2y^4 + x^3y^2$
7. $f(x,y) = x^2 + y^3$
8. $f(x,y) = x^2 + y^4$
9. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - x^3z$
10. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^{15}$
11. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + x^4 - y^6$.

Exercice 2. Soit a un réel positif. Discuter en fonction de a des points critiques de l'application f qui à (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2axy$. $(0,0)$ est-il un extremum (local) (strict) ?

Exercice 3. ⚠ Examiner l'existence d'un extremum local en $(0,0)$ de la fonction f qui à (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe $f(x,y) = e^{xy} - xy - 1$.

Exercice 4. Etudier les extrema de la fonction f qui à (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe

$$f(x,y) = \frac{b + x^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

On discutera suivant les valeurs de b.

Exercice 5. ⚠ On considère les fonctions suivantes

$$(a) \quad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & 2(x-y)^2 - x^4 - y^4. \end{array} \qquad (b) \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{y^2}{2} + xy. \end{array}$$

1. Etudiez l'existence d'un extremum en 0, et dites s'il est global ou local.
2. Montrez sans calcul que f admet au moins un maximum global. Montrez que g n'admet ni de minimum global, ni de maximim global.
3. Trouvez les autres points critiques et calculez la hessienne. Déduisez-en leur nature.

Exercice 6. Soit E l'espace de Hilbert des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de carré intégrable, muni de

$$\|x\| = \sqrt{\sum_n x_n^2}.$$

1. ⚠Soit la fonction $u(t) = t^2(1-t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ et
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} u(nx_n)$$
   (a) Donner le graphe de u.
   (b) Montrez que f est bien définie de $E \to \mathbb{R}$. f est-elle continue en 0?
   (c) Montrez que 0 n'est pas un minimum local (avec $x^{(p)} = 2p^{-1}\delta_p$).
2. On pose pour $h, k \in E$, $q(h,k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} h_n k_n$ et pour $h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}, h^{(4)}$,
$$e(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}, h^{(4)}) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(1)} h_n^{(2)} h_n^{(3)} h_n^{(4)}.$$
   Montrez que $q \in \mathscr{L}_s^2(E,\mathbb{R})$ et $e \in \mathscr{L}_s^4(E,\mathbb{R})$.
3. Montrez que $q = d^2 f_0/2$.
4. Fournissez un contre-exemple à la proposition "une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $df_x = 0$ et $d^2 f_x(h) > 0$ pour $h \in E \setminus \{0\}$ admet un minimul local en x", qui est valable en dimension finie.

Exercice 7. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le gradient et la matrice hessienne aux points $z_0 = (x_0, y_0)$ et écrire la formule de Taylor à l'ordre 3 en z_0. Dans chaque, dire si on peut conclure ou non que z_0 est un extrêmum local.

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = x^3 + y^2, & z_0 = (0,0). \\ g(x,y) = x^3 y^2 (1-x-y), & z_0 = (1/2, 1/3). \\ h(x,y) = \sin(x)\sin(y), & z_0 = (0,0). \end{array}$$

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme 2, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que
(1) pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, df_x soit injective
(2) $\lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = +\infty$.
Le but de l'exercice est de montrer que f est surjective. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $g(x) = \|f(x) - a\|^2$.

1. Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer dg_x pour $x \in \mathbb{R}^2$.
2. *Montrer que g atteint sa borne inférieure en un point x_0 où $dg_{x_0} = 0$.
3. *Conclure.
4. Soit $f(x) = (\arctan(x_1), \arctan(x_2))$. Montrez que f vérifie (1) mais n'est pas surjective. Donnez un autre exemple qui vérifie (1) et n'est pas surjective.

Exercice 9. Soit E, F des evn quelconques.

1. Montrez le résultat suivant : Soit $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathscr{L}_s^k(E,F)$ et $\varphi(x) = \ell(x^k)$, $x \in E$. Alors φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur E et pour $m \leqslant k, x, h \in E$,
$$d^m \varphi_x(h^m) = \frac{k!}{(k-m)!} \ell(\underbrace{x, \ldots, x}_{x^{k-m}}, \underbrace{h, \ldots, h}_{h^m})$$
   et $d^m \varphi = 0$ pour $m > k$. On pourra commencer par le montrer pour $m = 2$.
2. Soit $f : \Omega \subset E \to F$ une fonction k fois différentiable en $x \in \Omega$ telle que
$$f(x+h) = f(x) + \sum_{p=1}^{k} \ell_p(h^p) + o(h^k)$$
   avec $\ell_p \in \mathscr{L}_s^p(E,F)$. Montrez que $\ell_p(h^p) = \frac{1}{p!} d^p f(h^p)$ pour $h \in E$. (question bonus : Est-ce que ça implique $\ell_p = \frac{d^p f}{p!}$) ?

3. Dans la question précédente, on ne suppose plus que f est k fois différentiable. La conclusion est-elle toujours vraie ?

Exercice 10. Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n. On munit E du produit scalaire

$$\langle A, B\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} A_{i,j}B_{i,j}$$

pour $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et de la norme associée

$$\|M\|_2 = \sqrt{\langle M, M\rangle}, M \in E.$$

On note aussie $\|X\|_2$ la norme 2 de X pour $X \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrez que pour $A, B \in E, \langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^T)$ et déduisez-en que $\langle A, BC\rangle = \langle B^T A, C\rangle$ pour $C \in E$.
2. Montrez que les applications

$$\begin{array}{ccc} E \to \mathbb{R} & \quad\text{et}\quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ X \to \|X\|_2^2 & & X \to \|MX\|_2^2 \end{array}$$

   sont de classe $\mathscr{C}^2$ et donnez leur développement de Taylor-Young à l'ordre 2.
3. Soit $M \in E, K = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X\|_2 = 1\}$. Montrez qu'il existe $X_M \in K$ tel que $\|MX\| = |||M|||$, où la norme triple d'une matrice est celle de l'application linéaire $X \to MX$.
   La suite de cette question consiste en trouver ce X_M et la valeur de $|||M|||$.
   Soit $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et l'application $\varphi(X) = \frac{\|MX\|_2^2}{\|X\|_2^2}$ pour $X \in \Omega$.
   (a) Que vaut $\varphi(X)$ si X est un vecteur propre de $M^T M$
   (b) Montrez que φ est différentiable sur Ω. Que vaut $\varphi(aX)$ pour $X \in \Omega, a > 0$? Déduisez-en une relation entre $d\varphi_{aX}$ et $d\varphi_X$.
   (c) Calculez la différentielle de φ.
   (d) Montrez que φ_M est 2 fois différentiable en $X \in K$ et donnez son développement à l'ordre 2.
   (e) Montrez que pour $X \in \Omega$, $d\varphi_X = 0$ dans $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ ssi $M^T MX = \frac{X}{\|X\|^2}$.
   (f) En déduire que

$$|||M||| = \max\{\lambda : \lambda \text{ valeur propre de } M\}.$$

   (g) Montrez que $d^2\varphi_{X_M}(H^2) \leqslant 0$ pour $H \in E$. A-t-on une inégalité stricte pour $H \neq 0$?

TD4 - Inversion

Exercice 1. Soit

$$\varphi(x, y) = (xe^{x+y}, xe^{-x}).$$

Donner une condition sur (x, y) pour que φ soit un $\mathscr{C}^1$ -difféomorphisme sur un voisinage de (x, y).

Exercice 2. ⚠ On définit l'application $f : (x, y, z) \to (x + y, y/x, z/x)$.

1. Etudier la différentiabilité de f.
2. Sur et vers quels ouverts l'application f définit-elle un $\mathscr{C}^1$ -difféomorphisme ?

Exercice 3. Soit $g : t \to \sqrt{1+t^2}$. On définit l'application $f : (x, y) \to (u, v)$, où

$$u(x, y) = xg(y) + yg(x) \quad \text{et} \quad v(x, y) = (x + g(x))(y + g(y)).$$

1. Etudier la différentiabilité de f.
2. L'application f est-elle $\mathscr{C}^1$ -difféomorphisme?
3. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 4. Montrer que l'application qui à (r,θ,ϕ) associe $(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ définit un difféomorphisme.

Exercice 5. Soient E et F deux Banach, U un ouvert de E contenant 0_E et f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathscr{L}(E, F)$. On considère l'application g de U dans F définie par $g(x) = f(x) \cdot x$. Montrer que si $f(0_E)$ est un isomorphisme de E sur F alors g est un $\mathscr{C}^1$ -difféormorphisme dans le voisinage de 0_E.

Exercice 6. ⚠ Soit F et G deux applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = (x^2 + y^2)e^z - 2x^2 - 1 \;\text{ et }\; G(x, y, z) = x^2 - z^2 + y^2.$$

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une application ϕ, de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $F(x, y,\phi(x, y)) = 0$ dans le voisinage du point $(0,1)$, sans expliciter ϕ, et donner la différentielle de ϕ en fonction de F. Vérifier par un calcul direct.
2. Montrer qu'il existe plusieurs applications ψ, continues, telles que $G(x, y,\psi(x, y)) = 0$ dans le voisinage du point $(0,0)$. Quelle est l'hypothèse du théorème des fonctions implicites qui n'est pas respectée ?

Exercice 7. Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ définie par
Pour $x = (x_1,\dots,x_n)$, on note $x_{\hat{i}} = (x_1,\dots,x_{i-1}, x_{i+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

$$S = \{(x_1,\dots,x_n) : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

1. Faire la question 2 pour $n = 2$ et $n = 3$.

2. Soit $(x_1,\dots,x_n)\in S$. Montrer qu'il existe $1\le i\le n$, un voisinage V de $x_{\hat{i}}$, un voisinage W de x_i et $\varphi : V\to W$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que $(x_1,\dots,x_{i-1},\varphi(x_{\hat{i}}),x_{i+1},\dots,x_n)\in S$.

Exercice 8. ⚠ Soit E l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n\ge 1$. Soit $P\in E$, et x une racine simple de P.

1. Montrer que l'on peut définir φ une application $\mathscr{C}^1$ d'un voisinage V de P vers un voisinage W de x telle que pour $Q\in V$, $\varphi(Q)$ soit dans W la seule racine simple de Q.
2. Donner un exemple où P a une racine non-simple et il existe une suite de polynomes Q_n qui convergent vers P et qui n'ont pas de racine.
3. Peut-on effectuer le même raisonnement dans $\mathbb{R}[X]$ muni de $\|P\|=\sum_i |a_i|$? Muni de $\|P\|_{L^2}=\sqrt{\int_0^1 P(x)^2dx}$?

Exercice 9. ⚠ Soient E l'espace des applications $\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ qui s'annulent en 0 muni de la norme $|f|_1=\sup_{t\in[0,1]}|f'(t)|$ et F l'espace des applications $\mathscr{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $|f|_0=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$. On pose $\phi : E\to F, f\to f'+f^2$.

1. L'application ϕ est-elle différentiable ?
2. Soit g une application de E. Montrer que l'équation $f'+f^2=g$ admet une solution dans F lorsque $|g|_0$ est assez petite.

Exercice 10. On considère $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y)=(x^2-y,x^2+y^2).$$

On pose $g=f\circ f$.

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$.
2. Calculer $J_f(x,y)$ la matrice Jacobienne de f, puis calculer $J_g(0,0)$ la matrice Jacobienne de g au point 0.
3. Montrer qu'il existe $r>0$ tel que, pour tout $(x,y)\in\bar{B}(0,r)$, on ait $\|g'(x,y)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}\le 1/2$.

Exercice 11. ⚠ Montrer que l'équation matricielle $M^k=X$ admet une unique solution en M au voisinage de $X=M=I$. Y'a-t-il unicité de la solution si l'on se restreint uniquement à un voisinage de $X=I$?

Exercice 12. Montrer que pour tout t, $|t|<1/\sqrt{2}$, l'équation $\sin(tx)+\cos(tx)=x$ admet une solution unique $x=\phi(t)$ qui est $\mathscr{C}^\infty$. Donner un développement limité à l'ordre de 3 de ϕ dans un voisinage de 0.

Exercice 13. Montrer que l'égalité $x^3+y^3-3xy=1$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite $\phi : y\to x=\phi(y)$ telle que $\phi(0)=1$. Donner un DL de ϕ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Exercice 14. L'équation $x^5+yx^3+z^3-4z+1=0$ admet le point $(1,1,1)$ comme solution. Peut-on calculer implicitement z en fonction de (x,y) au voisinage de ce point ? Si oui, calculer les dérivées partielles premiéres de $z=\phi(x,y)$ en $(1,1)$ et donner un DL à l'ordre 1 de ϕ au voisinage de $(1,1)$.

Exercice 15 (Preuve du Théorème d'Inversion Locale)**.** Soit E, F deux evn, $\Omega \subset E$ ouvert, $f : \Omega \to E$. On suppose que pour un certain $x_0 \in \Omega$, f est $\mathscr{C}^1$ en x_0 et $df_{x_0} \in \mathscr{L}(E,F)^*$. On pose $y_0 = f(x_0)$. Le but de l'exercice est d'exhiber une boule $U_r := B(x_0, r), r > 0$, sur laquelle f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. On s'appuiera sur le théorème du point fixe de Picard, énoncé en cours. (Pour un corrigé, voir directement la preuve du TIL du poly).

1. Montrer qu'il existe $r' > 0$ tel que $df_x \in \mathscr{L}(E,F)^*$ pour $x \in B(x_0, r')$.
2. Soit $y \in E$. On pose
$$\varphi_y(x) = x + df_{x_0}^{-1}(y - f(x)), x \in U_r.$$
   (a) Montrer qu'il existe $r_0 < r'$ tel que si $r < r_0$, φ_y est contractante sur U_r, en utilisant l'IAF.
   (b) Montrer qu'il existe $r_1 > 0$ tel que si $y \in B(y_0, r_1)$, $\varphi_y(U_{r_0}) \subset U_{r_0}$.
   (c) Soit $U = U_{r_0}$. En utilisant le théorème du point fixe, montrer que pour $y \in B(y_0, r_1)$, φ_y admet un unique point fixe x dans U qui vérifie $f(x) = y$. On peut alors définir $f^{-1}(y) = x$.
3. Montrons désormais que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $V := f(U)$. Pour $y \in V, h \in E$ tel que $y + h \in V$, ou souhaite étudier la perturbation $f^{-1}(y+h)$, on pose donc (l'unique) $z = z_h \in E$ tel que $f^{-1}(y+h) = x + z$.
   (a) Montrer que
$$\|f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y) - df_x^{-1}(h)\| \leq |||df_x^{-1}||| \|f(x+z) - f(x) - df_x(z)\|.$$
   (b) Montrer que $M := \sup_{x\in U} |||df_x^{-1}||| < \infty$
   (c) Montrer que
$$\|f(x+z) - f(x) - df_x(z)\| = o(h)$$
   (d) Conclure.

TD5 - Equations différentielles

Exercice 1. On considère des équations de la forme $y' = f(t, y)$ avec pour condition initiale $y(0) = y_0$. Dans les cas suivants, justifiez l'existence et l'unicité de la solution dans le voisinage de $t = 0$.

$$(a)\ f(t, y) = \exp(ty)\cos(y) \quad (b)\ f(t, y) = |y| \quad (c)\ f(t, y) = a(y)t + b(y),$$

où a et b sont des fonctions de classe C^1.

Exercice 2. ⚠On considère l'équation différentielle

$$3y(x)^2 y'(x) = \frac{(1 + y(x)^3)}{1 + x^2}.$$

1. Indiquez pour quelles conditions initiales (x_0, y_0) on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à l'équation précédente, et énoncez-la conclusion.
2. Donnez des primitives des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $y \mapsto \frac{3y^2}{1+y^3}$.
3. Donnez la forme générale des solutions de l'équation différentielle.
4. Donnez la solution qui vérifie $y(0) = y_0$ pour $y_0 \in \mathbb{R}$ donné qui satisfait aux conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle.

$$y'(1 + y) = x.$$

1. Donner tous les couples $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ où l'on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, et énoncez le théorème.
2. Donnez la forme générale des solutions (on pourra calculer la dérivée de $(1 + y)^2$).
3. Donnez un couple solution (I, y) tel que $y(2) = 0$, où I est un intervalle ouvert contenant 2. Y'a-t-il unicité locale de la solution ?
4. La solution précédente est-elle maximale ? (On pourra calculer la limite de y' aux bornes de l'intervalle)

Exercice 4. Soit l'équation

$$(1 - x^3)y' + x^2 y + y^2 - 2x = 0.$$

1. ⚠De quel type d'équation s'agit-il ?
2. ⚠Trouver une solution particulière de la forme $y(x) = x^k$.
3. ⚠Se ramener à une équation de Bernoulli.
4. ⚠Donner la forme générale des solutions. Sur quel intervalle sont-elles définies.

5. Appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz quand c'est possible, et donner la solution pour des conditions initiales données.
6. Etant donné une solution, calculer sa dérivée en 1. Y'a-t-il unicité de la solution maximale pour des conditions initiales données ?

Exercice 5. But : Trouver toutes les solutions maximales de l'ED $y' = |y|^{2/3}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que toute solution est croissante.
2. Donner les intervalles où $f(t, y) = f(y) = |y|^{2/3}$ est localement lipschitzienne.
3. Donner une solution à un problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ dans les cas $y_0 > 0$ et $y_0 < 0$.
4. Donner trois solutions au problème $y' = |y|^{2/3}, y(0) = 0$. Montrer qu'il y en a une infinité.
5. Montrer que pour chaque solution y, l'ensemble de zéros $y^{-1}(\{0\})$ est un intervalle, et montrez que réciproquement étant donné un intervalle quelconque I il existe une solution maximale y telle que $I = y^{-1}(\{0\})$.
6. Donnez toutes les solutions maximales de tous les problèmes de Cauchy possibles.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle

$$y''' - yy'' = 0.$$

1. Mettre cette équation sous la forme canonique $Y' = f(t, Y)$.
2. Soient $t_0, a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale telle que $\phi(t_0) = a$, $\phi'(t_0) = b$ et $\phi''(t_0) = c$.
3. Soit ϕ une solution maximale. Calculer la dérivée de $t \mapsto \phi''(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} \phi(u)\, du}$. En déduire que ϕ est soit convexe, soit concave sur son domaine de définition. Déterminer ϕ dans le cas où $\phi''(t_0) = 0$

Exercice 7. On considère l'équation $xx'' = (x')^2 + 1$.

1. Montrer que $x_0 \neq 0$ et x'_0 étant donnés dans $\mathbb{R}$, il existe une unique solution φ définie au voisinage de 0, telle que $\varphi(0) = x_0$ et $\varphi'(0) = x'_0$.
2. Si de plus $x'_0 \neq 0$, on peut supposer que φ est un $\mathscr{C}^1$ -difféomorphisme sur un voisinage de 0 (pourquoi ?) ; on note ψ l'application réciproque et on pose $z(x) = \varphi'(\psi(x))$. Calculer $z'(x)$, trouver l'équation satisfaite par z et expliciter z.
3. Que vaut $(\varphi^{-1})'$ si $\varphi(0) = x_0 \neq 0$ et $\varphi'(0) = 0$?

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ donnée par

$$f(t, x) = \frac{4t^3 x}{t^4 + x^2}$$

si $(t, x) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. On s'interesse à l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$.

1. L'application f est-elle continue ? Est-elle localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ? Que peut-on en déduire pour l'équation ?
2. Soit φ une solution qui est définie sur un intervalle I ne contenant pas 0. On définit une application ψ par $\varphi(t) = t^2\psi(t)$, $t \in I$. Déterminer une équation différentielle (E) telle que ψ soit solution de cette équation, puis résoudre cette équation (E).
3. Que peut-on en déduire pour l'existence et l'unicité de l'équation différentielle originale avec donnée initiale $(t0, x0) = (0, 0)$?

TD6 - Equations différentielles linéaires

Exercice 1. Montrer que toutes les solutions maximales de l'équation différentielle $y' = \sin(ty)$ sont paires et globales.

Exercice 2. ⚠On considère l'équation différentielle $y' = |y| + |t|$.

1. Montrer que, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une solution maximale (I, ϕ) telle que $\phi(0) = y_0$.
2. Déterminer la solution maximale correspondant à $y_0 = 0$.

Exercice 3. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une fonction bornée. Montrer que les solutions maximales de l'équation $y' = \langle y, f(t, y)\rangle$ sont globales.

Exercice 4. ⚠Résoudre l'équation

$$x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = 0.$$

1. Sachant que $\alpha(x) = x^{-2}$ est une solution particulière, trouver une solution $\beta(x)$ qui n'est pas proportionelle à $\alpha(x)$ (i.e. tel qu'il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\beta(x) = \lambda\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$).
2. Donner l'ED d'ordre 1 en dimension 2 correspondante et les couples $(x_0, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ où l'on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.
3. Donnez la (les) solution(s) maximale(s) pour un tel couple.
4. Donnez les solutions pour (x_0, Y_0) quelconque.

Exercice 5. Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation différentielle $y' = t + \sin y$, avec les conditions initiales $y_1(0) = 0$ et $y_2(0) = 0,01$ respectivement. Montrer que, pour tout $t \in [-2, 2]$, $|y_2(t) - y_1(t)| \le 0,1$.

Exercice 6. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\exp(tA), \exp(tB)$, $t \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que si deux matrices X, Y commutent, $\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$
3. Calculer

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice 7. Donnez les solutions de $y'' + y = \cos$.

Exercice 8. Soit $\mathscr{M}$ l'espace des matrices carrées d'ordre n muni d'une norme matricielle $\|\cdot\|$, et G le groupe des matrices inversibles.

1. Soit $X \in \mathscr{M}$ telle que $\|X\| < 1$, et pour $N \ge 1$

$$f_N(X) = \sum_{k=0}^{N} X^k.$$

Calculer la limite quand $N \to \infty$ de $(I - X)f_N(X)$.

2. En déduire un développement en série entiére de l'application $f : X \mapsto (I-X)^{-1}$. Quelle analogie pouvez-faire avec les fonctions réelles ? L'égalité est-elle toujours vraie pour $\|X\| = 1$? Montrer que pour $t \leq 1$, $\|X\| < 1$, $I + tX$ est inversible et $\det(I + tX) > 0$.
3. Montrez que l'on peut définir l'application
$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$
pour n'importe quelle matrice X.
4. On suppose qu'on utilise la norme $\|\cdot\| = n\|\cdot\|_{\infty}$. Vérifier que c'est une norme matricielle. Montrer que pour $\|H\| < 1$, $0 < t \leq 1$,
$$|Tr(f(tH)H)| \leq \frac{\|H\|}{1 - t\|H\|}.$$
5. On pose $\varphi(t) = \det(I + tH) - 1$. En appliquant le lemme de Gronwall, donner une approximation de $\det(I + H)$ en fonction de $\|H\|$. (On pourra utiliser l'expression de la différentielle du déterminant vue à la fiche 2)
Le lemme de Gronwall stipule que pour φ, ψ continues et positives sur $[0, 1]$, si il existe $K, L \geq 0$ tels que
$$\varphi(t) \leq K + L \int_0^t \varphi(s)\psi(s)ds,$$
alors
$$\varphi(t) \leq K \exp(L \int_0^t \psi(s)ds).$$

Première partie

Sujets d’évaluation

Exercice 9. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\exp(tA), \exp(tB)$, $t \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que si deux matrices X, Y commutent, $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$
3. Calculer

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice 10. Donnez les solutions de $y'' + y = \cos$.

Exercice 11. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y' = f(y), \text{ avec } f(y) = 3|y|^{\frac{2}{3}}.$$

1. Expliciter au moins deux solutions maximales sur $\mathbb{R}$ pour la condition initiale $y(0) = 0$. Déduisez-en des paramètres (t_0, y_0) pour lesquels il n'y a pas unicité de la solution du problème de Cauchy.
2. Montrer que f est localement lipschitzienne sur tout intervalle de $\mathbb{R}^*$ mais ne l'est pas dans le voisinage de 0.
3. Donnez une solution locale au problème de Cauchy, lorsque le théorème de CL s'applique.
4. Soit y une solution, et Z son ensemble de zéros. Montrez que Z est un intervalle. Supposons que $t_+ := \sup Z < \infty$. Donnez la forme de $y(t)$ pour $t > t_+$. Faites pareil si $\inf Z > -\infty$.
5. En déduire la forme générale des solutions.
6. On prend la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Expliciter l'ensemble des solutions maximales sur $\mathbb{R}$ ayant cette condition initiale.

Exercice 12. Résoudre le problème de Cauchy, et donner toutes les solution globales de l'équation

$$(x^2+1)y' = y^2 - 1.$$

Exercice 13. On considère le système différentiel suivant :
où les paramètres a, b, c et d sont des scalaires strictement positifs. On pose la condition initiale $x(t_0) = x_0 > 0$ et $y(t_0) = y_0 > 0$.

$$\begin{cases} x' &= -ax - cxy \\ y' &= -by - dxy \end{cases},$$

1. Justifier l'existence et l'unicité de la solution. On note $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ la solution.
2. Montrer que, $\forall t$, $\tilde{x}(t) > 0$ et $\tilde{y}(t) > 0$.
3. En déduire que $\tilde{x}(t)$ et $\tilde{y}(t)$ sont strictement décroissantes et tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
4. Montrer qu'il existe deux fonctions v et w telles que $v(\tilde{y})\tilde{y}' = w(\tilde{x})\tilde{x}'$.
5. En déduire que l'ensemble $\{(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t); t \in \mathbb{R})\}$ est incluse dans la ligne de niveau d'une fonction F à préciser.

Exercice 14. Soit E l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ qui vérifient $f(0) = 0, f(1) = 1$, muni de la norme

$$N(f) = \sqrt{\int_0^1 f'(x)^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}.$$

Soit s une fonction intégrable bornée, et soit la fonctionelle définie sur E

$$\varphi(f) = \int_0^1 f'(x)^2 dx + \int_0^1 (f(x) - s(x))^2 dx.$$

Le but de l'exercice est de trouver un minimum de la fonction φ.

commentaire Ce type de calcul s'appelle "calcul variationnel". f fournit une approximation de s qui varie de manière plus régulière.

1. Montrer que N est bien une norme sur E.
2. Etudier la différentiabilité de φ.
3. Montrer que si f est un point critique deux fois dérivable, alors pour tout $h \in E$,

$$\int_0^1 (-f''(x) + f(x) - s(x))h(x) dx = 0.$$

4. Désuisez-en que si s est continue, φ admet au plus un minimum.
5. Montrez que $d^2\varphi(h) > 0$ pour $h \in E \setminus \{0\}$. Peut-on en conclure que le point critique de la question précédente est un minimum?
6. On suppose que

$$s(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1/2, \\ 1 \text{ si } x > 1/2. \end{cases}$$

Donnez l'unique point critique f de φ et montrez que f n'est pas deux fois dérivable.

Exercice 15. Soit (u, v) une base de l'équation différentielle
où $p, q \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$.

$$y'' + py' + qy = 0$$

1. Montrer que les zéros de u sont isolés.
2. Montrer que le Wronskien ne s'annule pas.
3. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de u, il y a un unique zéro de v.

Exercice 16. Soit I un intervalle et $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par
où f, g sont des fonctions de $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ et les matrices U et V commutent.

$$A(t) = f(t)U + g(t)V, t \in I,$$

1. Donner la résolvante du système $Y' = A(t)Y$.
2. Donner la résolvante lorsque

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

pour $a, b \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$.

3. Donner la résolvante lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos^2 \\ 0 & 1 & \cos^2 \\ 0 & 0 & \sin^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. On considère le système
où pour $t \in]0,+\infty[$,

$$Y' = AY + B$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/t^2 & 2/t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/t \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $Y_1 : t \mapsto (t,1)$ est solution du système homogène associé.
2. Soit $X = (0,1)$. Déterminer des fonctions réelles λ_1 et λ_2 telles que $Y_2 = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 X$ soit solution du système homogène. En déduire l'ensemble des solutions du système homogène.
3. Trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, et en déduire l'ensemble des solutions.
4. Résoudre l'équation différentielle

$$t^2 y'' + 2ty' + 2y = t,$$

pour $t > 0$.

Calcul différentiel et équations différentielles
Devoir maison, première partie
A rendre pour le 1er avril 2020

Une fois votre travail terminé, merci d'envoyer un scan ou une photographie de bonne qualité de votre copie à l'adresse raphael.lachieze-rey@parisdescartes.fr avec comme objet [DM Calcul diff].

Soit E l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ qui vérifient $f(0) = 0, f(1) = 0$, muni de la norme

$$N(f) = \sqrt{\int_0^1 f'(x)^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}.$$

Soit $s : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction intégrable bornée, et soit la fonctionelle définie sur E

$$\varphi(f) = \int_0^1 f'(x)^2 dx + \int_0^1 (f(x) - s(x))^2 dx.$$

Le but de l'exercice est de trouver un minimum de la fonction φ.

Commentaire Ce type de calcul s'appelle "calcul variationnel". f fournit une approximation de s qui varie de manière plus régulière.

1. Montrer que N est bien une norme sur E.
2. Etudier la différentiabilité de φ.
3. Montrer que si f est un point critique de φ deux fois dérivable, alors pour tout $h \in E$ telle que $h(1) = 0$,

$$\int_0^1 (-f''(x) + f(x) - s(x))h(x)dx = 0.$$

4. Désuisez-en que si s est continue, φ admet au plus un minimum.

5. Montrez que φ est deux fois différentiable et $d^2\varphi(h^2) > 0$ pour $h \in E \setminus \{0\}$. Peut-on en conclure que le point critique de la question précédente est un minimum ?

2ème partie

6. On se place désormais sur l'espace E' des fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ telles que $f(0)=0, f'(0)=0$.
   (a) Vérifiez que N est aussi une norme sur E' et que φ y est différentiable.
   (b) Montrez que φ admet un unique point critique si s est continue.
   (c) Soit
   $$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$,
   $$\exp(tA)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t+e^{-t} & e^t-e^{-t} \\ e^t-e^{-t} & e^t+e^{-t} \end{pmatrix}$$
   (d) Mettre l'ED sous la forme canonique $Y'=F(t,Y)$ avec $Y(t)=\begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, et donner l'expression du point critique de la question précédente en fonction d'une intégrale qui dépend de la fonction s. Donnez l'expression si $s=1$ est constante.
7. On revient sur l'espace E. On suppose que
   $$s(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1/2, \\ 1 \text{ si } x > 1/2. \end{cases}$$
   Soit f un point critique de φ.
   (a) Montrez que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]\setminus\{1/2\}$ mais f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ en $1/2$. On pourra raisonner sur les espaces $L^2([0,1/2[)$, et $L^2(]1/2,1])$.
   (b) Donnez l'unique fonction f dérivable qui peut être un minimum local de φ (on ne demande pas de prouver que c'est effectivement un minimum). On pourra résoudre séparément $f-f''=s$ sur $[0,1/2[$ et sur $]1/2,1]$.

Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Calcul différentiel et équations différentielles
Devoir maison

Durée : 1h30

Une fois votre travail terminé, merci d'envoyer un scan ou une photographie de bonne qualité de votre copie.

Je dois avoir reçu votre copie avant 16h55.

Exercice 1 On considère la fonction

$$f(x,y) = x(\ln(x)^2 + y^2)$$

définie sur le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

.

1. Donnez le(s) point(s) critique(s) de f.
2. Donnez la hessienne de f et son déterminant en chaque point critique.
3. Pour chaque point critique, donnez sa nature (point selle, minimum local, maximum local).
4. f admet-elle un minimum/maximum global ?

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[1,2]} |P(x)|$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} g : & E & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & \displaystyle\int_1^2 \sin(P(t)/t)\,dt. \end{array}$$

1. Montrez que pour tout $x, h \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(x+h) - \sin(x) - h\cos(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}.$$

2. Montrez que g est différentiable en tout $P \in E$ et donner sa différentielle.
3. Trouvez $P \in E$ tels que $g(P) = 1$.
4. Déduisez-en une infinité de maxima globaux de g. Sont-ils stricts ? Donnez également une infinité de minima globaux.
5. Soit $P \in E$. On pose $\mu_k(P) = \int_1^2 t^{k-1}\cos(P(t)/t)\,dt$. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur les $\mu_k(P)$ pour que P soit un point critique de g.
6. Montrez que g est deux fois différentiable et donnez sa différentielle seconde.

Exercice 3
On considère l'équation $xx'' = (x')^2 + 1$.

1. Montrer que $x_0 \neq 0$ et x'_0 étant donnés dans $\mathbb{R}$, il existe une unique solution φ définie au voisinage de 0, telle que $\varphi(0) = x_0$ et $\varphi'(0) = x'_0$.
2. Montrer que si de plus $x'_0 \neq 0$, on peut supposer que φ est un $\mathscr{C}^1$ -difféomorphisme sur un voisinage de x_0.
3. On note ψ l'application réciproque et on pose $z(x) = \varphi'(\psi(x))$. Calculer $z'(x)$, trouver l'équation satisfaite par z et expliciter z
4. En déduire une expression de φ.

Exercice d'oral
25 juin 2020

Préparation : 20 minutes (sur papier)

Exercice On considère l'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 1$, en $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Trouvez une solution "simple" (x_0, y_0) de cette équation.
2. Montrez qu'il existe un voisinage V de y_0 et une fonction $\phi : V \to \mathbb{R}$ tels que $(\phi(y), y)$ soit solution pour $y \in V$. Que peut-on dire de plus sur les solutions ?
3. Donnez un DL de ϕ à l'ordre 2 en 0.

Exercice d'oral
25 juin 2020

Préparation : 20 minutes (sur papier)

Exercice On considère l'ED

$$f''(x) - f(x) = \exp(x) + \exp(-x), x \in \mathbb{R}. \tag{E}$$

1. Soit $x_0, y_0, y_0' \in \mathbb{R}$. Montrez que le problème

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0, f'(x_0) = y_0' \\ f \text{ est solution de } (E) \end{cases}$$

   admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. (On pourra mettre l'équation sous la forme d'une équation d'ordre 1 dans un espace approprié).
2. Donnez les solutions homogènes de l'équation (E).
3. Donnez une solution particulière de (E).
4. Donnez toutes les solutions de (E).

Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Calcul différentiel et équations différentielles
Contrôle Continu
10 Mars 2021

Durée : 1h30

Exercice 18. Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n. On munit E du produit scalaire

$$\langle A, B\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} A_{i,j}B_{i,j}$$

pour $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et de la norme associée

$$\|M\|_2 = \sqrt{\langle M, M\rangle}, M \in E.$$

On note aussie $\|X\|_2$ la norme 2 de X pour $X \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrez que pour $A, B \in E, \langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^T)$ et déduisez-en que $\langle A, BC\rangle = \langle B^T A, C\rangle$ pour $C \in E$.
2. Montrez que les applications

$$\begin{array}{rl} E \to \mathbb{R} \\ M \to \|M\|_2^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rl} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ X \to \|X\|_2^2 \end{array}$$

   sont différentiables et donnez leurs différentielles.
3. Soit $M \in E, K = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X\|_2 = 1\}$. Montrez qu'il existe $X_M \in K$ tel que $\|MX\| = |||M|||$, où la norme triple d'une matrice est celle de l'application linéaire $X \to MX$.

   La suite de l'exercice consiste en trouver ce X_M et la valeur de $|||M|||$.
   Soit $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et l'application $\varphi(X) = \frac{\|MX\|_2^2}{\|X\|_2^2}$ pour $X \in \Omega$.

   (a) Que vaut $\varphi(X)$ si X est un vecteur propre de $M^T M$?
   (b) Montrez que φ est différentiable sur Ω. Que vaut $\varphi(aX)$ pour $X \in \Omega, a > 0$? Déduisez-en une relation entre $d\varphi_{aX}$ et $d\varphi_X$.
   (c) Calculez la différentielle de φ.
   (d) Montrez que pour $X \in K$, $d\varphi_X = 0$ dans $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ ssi X est vecteur propre de $M^T M$.
   (e) On admet que X_M vérifie $d\varphi_{X_M} = 0$. En déduire que

$$|||M||| = \max\{\lambda : \lambda \text{ valeur propre de } M^T M\}.$$

Exercice 19. Soit $p \geqslant 0$. Soit f_p l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_p(x, y) = \begin{cases} (x + y)^p \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Calculer $f_p(h_n)$ où $h_n = (\frac{1}{\sqrt{2(\pi n+\pi/2)}}, \frac{1}{\sqrt{2(\pi n+\pi/2)}})$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $p > 0$.
3. Montrer que f est différentiable si et seulement si $p > 1$.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si $p > 2$.

Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Calcul différentiel et équations différentielles
Examen
10 Mai 2021

Durée : 1h30

Exercice 1 On considère l'équation différentielle.

$$y'(1+y) = x.$$

1. Donner tous les couples $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ où l'on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, et énoncez le théorème.
2. Donnez la forme générale des solutions (on pourra calculer la dérivée de $(1+y)^2$).
3. Donnez un couple solution (I, y) tel que $y(2) = 0$, où I est un intervalle ouvert contenant 2. Y'a-t-il unicité locale de la solution ?
4. La solution précédente est-elle maximale ? (On pourra calculer la limite de y' aux bornes de l'intervalle)

Exercice 2 On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme 2, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que

(1) pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, df_x soit injective

(2) $\lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = +\infty$.

Le but de l'exercice est de montrer que f est surjective. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $g(x) = \|f(x) - a\|^2$.

1. Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer dg_x pour $x \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que g atteint sa borne inférieure en un point x_0 où $dg_{x_0} = 0$.
3. Conclure.
4. Soit $f(x) = (\arctan(x_1), \arctan(x_2))$. Montrez que f vérifie (1) mais n'est pas surjective. Donnez un autre exemple qui vérifie (1) et n'est pas surjective.

Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Calcul différentiel et équations différentielles
Examen 2ème session

Durée : 1h30

Exercice 1
On considère l'équation différentielle

$$3y(x)^2y'(x) = \frac{(1+y(x)^3)}{1+x^2}.$$

1. Indiquez pour quelles conditions initiales (x_0, y_0) on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à l'équation précédente, et énoncez la conclusion.
2. Donnez des primitives des fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ et $y \mapsto \frac{3y^2}{1+y^3}$.
3. Donnez la forme générale des solutions de l'équation différentielle.
4. Donnez la solution qui vérifie $y(0) = y_0$ pour $y_0 \in \mathbb{R}$ donné qui satisfait aux conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 2 On considère la fonction sur $\Omega = \mathbb{R}\times]0,\infty[$

$$f(x,y) = y(x^2 + (\ln(y))^2).$$

1. Trouver les points critiques de f.
2. Montrer que l'un de ces points critiques est un minimum global.
3. Que peut-on dire de l'autre point critique ?

Exercice 3 Pour $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, on note

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2}.$$

On note $E = \{x : \|x\|_2 < \infty\}$ l'espace des suites de carré sommable, muni de la norme $\|\cdot\|_2$.

1. Soit
$$\ell(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{k^2}.$$
(il s'agit bien d'y_{k^2} et non pas y_k) Montrez que ℓ est bilinéaire continue de E^2 dans $\mathbb{R}$. Est-ce un produit scalaire sur E ?
2. Soit
$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k + y_{k^2})^2.$$
Montrez que $f(x,y) < \infty$ pour $x, y \in E$.

3. Montrez qu'à x fixé, f est différentiable selon y et donnez sa différentielle $\partial_2 f(x,y) \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.
4. * Montrez que l'application $(x,y) \mapsto \partial_2 f(x,y)$ est continue.
5. Montrez que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $E \times E$.

Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Calcul différentiel et équations différentielles
Contrôle Continu
7 mars 2022

Durée : 1h30

Exercice 1
On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|g\| = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|.$$

1. Montrez que $\|g\| < \infty$ pour $g \in E$ et $\|\cdot\|$ définit bien une norme sur E.
2. Soit u une fonction mesurable définie sur $[0,1]$ et bornée. Montrer que

$$\varphi : g \in E \mapsto \int_0^1 u(x)g(x)dx \in \mathbb{R}$$

   est différentiable et calculer sa différentielle.
3. Soit u une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à dérivée seconde bornée. Montrer que

$$\psi : g \in E \mapsto \int_0^1 u(g(x))dx \in \mathbb{R}$$

   est différentiable et calculer sa différentielle. L'application ψ est-elle de classe C^1 ?

Exercice 2 On considère la fonction

$$f(x,y) = x(\ln(x)^2 + y^2)$$

définie sur le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

1. On définit sur $\mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = \begin{cases} f(|x|,y) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   (a) Montrez que g est continue sur $\mathbb{R}^2$
   (b) Montrez que g n'est pas différentiable en $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$.
   (c) Quels sont les extrema de g sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ et leur nature?
   (d) Montrez que $h(x,y) = |x|g(x,y)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Donnez le(s) point(s) critique(s) de f.
   (b) Donnez la hessienne de f et son déterminant en chaque point critique.
   (c) Donnez les extrema locaux de f.
   (d) Donnez les extrema globaux de f, et leur nature (stricte ou pas).

Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Calcul différentiel et équations différentielles
Examen
7 mars 2022

Durée : 1h30

Exercice 1. Soient E l'espace des applications $\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ qui s'annulent en 0 muni de $|f|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$ et F l'espace des applications $\mathscr{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $|f|_0 = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On pose $\phi : E \to F, f \to f' + f^2$.

1. Montrez que si $|f|_1 = 0$ pour $f \in E$, $f \equiv 0$, puis que $|\cdot|_1$ est une norme.
2. Montrez que ϕ est différentiable sur E et donner sa différentielle.
3. Soit g une application de E. On considère l'équation
$$f' + f^2 = g.$$
Montrez qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|g|_0 \leqslant \varepsilon$, l'équation admet une unique solution f dans F.

Exercice 2. Soit ϕ une solution maximale de l'équation
$$x'(t) = \cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \tag{1}$$
qui satisfait $\phi(0) = 0$.

1. Montrer que ϕ est défini sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que ϕ est impair.
3. Soit $y_0 = \phi(1)$, et ψ une solution maximale du problème de Cauchy
$$y'(t) = -\cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right), \tag{2}$$
$$y(0) = y_0. \tag{3}$$
Montrer que $\psi(1) = 0$.
4. Montrer que
$$\int_0^{y_0} \cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{-1} dx = 1. \tag{4}$$

Exercice 3. On considère le problème de Cauchy
$$y'(t) = -\frac{1}{2}\tan(t)y + \sin(t)y^3, \tag{5}$$
$$y(0) = 2. \tag{6}$$

1. Montrer que le problème admet une unique solution maximale.
2. Effectuer le changement de variable adéquat pour ramener l'équation (5) Ã l'équation linéaire
$$z'(t) = \tan(t)z - 2\sin(t). \tag{7}$$
3. Trouver la solution générale d'équation (7).
4. Trouver la solution maximale du problème de Cauchy formé par l'équation (5) avec la condition initiale (6). Est-elle globale ?