Problèmes de réalisabilité avec conditions de régularité

Raphael Lachièze-Rey
travaux réalisés avec Ilya Molchanov, Bruno Galerne

MAP5, Université Paris Descartes

17 novembre 2012

Moments d'une variable réélle

Soit $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$, existe-t-il une variable aléatoire réélle V telle que

$$\mathbf{E}V = m_1, \mathbf{E}V^2 = m_2?$$

Marginales de processus ponctuels

- E : espace topologique
- $\mathcal{N}$: Configurations sur E
- $\eta(\omega) \in \mathcal{N}$: Processus ponctuel

Mesure de corrélation :

$$\boxed{\rho_\eta(dx, dy) = 1_{x \neq y} \mathbf{E} \mathrm{card}(\eta \cap dx) \mathrm{card}(\eta \cap dy), x, y \in E}$$

$$\text{càd} \int_{E \times E} h \, d\rho_\eta = \mathbf{E} \sum_{x \neq y \in \eta} h(x, y), \quad h \text{ fonction test}$$

Problème de réalisabilité : Etant donné ρ, existe-t-il η tel que $\rho = \rho_\eta$?

Ensembles aléatoires

- **Fermés aléatoires**, cadre classique de la géométrie stochastique
  - X borélien de $\mathcal{F}$ (fermés de E) topologie engendrée par les fonctions

$$F \in \mathcal{F} \mapsto 1_{\{K \cap F \neq \emptyset\}}, \quad K \text{ compact.}$$

- **Mesurables aléatoires**, cadre plus faible. $(E, \mathcal{M}, \mu)$ esp. mesuré
  - X élément de $\mathcal{M}$ (mesurables), tribu engendrée par

$$\varphi_A(X) = \mu(A \cap X), \ \mu \text{ mesure sur } E \ , \ A \in \mathcal{M}.$$

$\psi_x : X \mapsto 1_{\{x \in X\}}$ n'est pas mesurable en général pour $x \in E$.

- **Pas de cadre**, $X \in$ l'ensemble des parties de E, où tout élément est mesurable.

Problème de marginale d'ordre 2 pour un ensemble aléatoire

- Soit $p(x,y)$ une fonction symétrique mesurable sur $E \times E$, existe-t-il un fermé aléatoire X tel que

$$p(x,y) = \mathbf{P}(x, y \in X)?$$

- Pour X mesurable aléatoire, $X \to 1_{\{x,y \in X\}}$ n'est pas mesurable, et p est définie via les fonctions test h

$$\int p\, h\, d\mu = \mathbf{E} \int_{X \times X} h\, d\mu.$$

"covariance faible"

Problème de marginale d'ordre 2 pour un ensemble aléatoire

$E \subset \mathbb{R}^d$

- variogramme d'un ensemble $A \in \mathcal{M}$

$$\Gamma_A(y) = \mathbf{E}\ell(A \cap (A+y)), \quad y \in \mathbb{R}^d, \ell = Lebesgue.$$

- Si X est homogène dans $\mathbb{R}^d$ (loi invariante par translation)

$$\overline{\Gamma_X}(y) := \ell(X \cap (X+y) \cap [0,1]^d) = p(0,y) \overset{p.p.}{=} \mathbf{P}(0, y \in X).$$

- Etant donné Γ (ou $\overline{\Gamma}$), existe-t-il X tel que $\Gamma_X = \Gamma$ (ou $\overline{\Gamma}_X = \overline{\Gamma}$) ?

Conditions nécessaires "algébriques" I

- Si (m_1, m_2) réalise une variable aléatoire V,
$$m_1^2 = (\mathbf{E}V)^2 \leq \mathbf{E}(V^2) = m_2,$$
donc $m_1^2 \leq m_2$ est une condition nécessaire.
- Soit $h(x), x \in E$ une fonction test telle que $\int h d\mu = 0$, alors si ρ réalise le processus ponctuel η,
$$\begin{aligned}\int h(x)h(y)d\rho(x,y) &= \mathbf{E}\sum_{x \neq y} h(x,y) \\ &= \mathbf{E}(\sum_{x,y \in \eta} h(x)h(y) - \sum_{x \in \eta} h(x)h(x)) \\ &= \mathbf{E} - \sum_{x} h(x)^2 \leq 0, ???\end{aligned}$$
pour tout h, ρ doit donc etre **conditionellement negative**.

Conditions nécessaires “algébriques” II

- Si $p = p_X$ est la covariance d'un ensemble aléatoire,

$$\int p(x,y)h(x)h(y)d\mu(x,y) = \mathbf{E}\left(\int_X h(x)d\mu(x)\right)^2 \geq 0,$$

  p doit etre semi-définie positive.
- On a

$$|\Gamma_X(y) - \Gamma_X(z)| \leq |\Gamma_X(0) - \Gamma_X(y-z)|$$

  (et Γ doit etre SDP)
- Conditions indépendantes du modèle choisi. Mais ces conditions ne sont pas suffisantes.

Condition de régularité

- Soit X un fermé aléatoire. Soit $(x, y) \in E$. Soit $x_n \to x, y_n \to E$. Alors comme X est fermé, p.s. le TCM implique

$$
\begin{aligned}
1_{x\in E} 1_{y \in E} &\geq \limsup 1_{x_n \in E} 1_{y_n \in E}, \\
p(x, y) &\geq \mathbf{E} \limsup 1_{x_n \in E} 1_{y_n \in E} \geq \limsup p(x_n, y_n),
\end{aligned}
$$

  et p doit donc etre SCS.
- Soit X un mesurable aléatoire. Alors Γ_X est uniformément continue.

Opérateur positif

On modélise le problème à l'aide d'opérateurs polynomiaux :

- $\mathscr{P}$: polynomes de degré 2, $P(x) = a + bx + cx^2$
- X : variable aléatoire de 1ers moments m_1 et m_2. Alors

$$\mathbf{E}P(V) = a + bm_1 + cm_2.$$

Une condition nécessaire sur un couple (m_1, m_2) est donc que pour tout polynome positif ($b^2 - 4ac \leq 0$, $a \geq 0$),

$$a + bm_1 + cm_2 \geq 0,$$

ce qui est équivalent à $m_1^2 \leq m_2$.

Opérateur sur les applications $\mathcal{N} \mapsto \mathbb{R}$

$\rho(dx, dy)$ mesure sur $E \times E$.

- $\mathscr{P}$ espace des fonctions

$$P_{c,h} = c + g_h : \eta \in \mathcal{N} \to c + \sum_{x \neq y \in \eta} h(x, y),$$

- $\Phi_\rho(P_{c,h}) = c + \int_{E \times E} h d\rho \quad (= \mathbf{E} P_{c,h}(\eta) \text{ si } \rho = \rho_\eta)$
- Φ_ρ est positif sur $\mathscr{P}$ si pour tout c, h tel que $P_{c,h} \geq 0$ sur $\mathcal{N}$,

$$\Phi_\rho(P_{c,h}) \geq 0.$$

$\Leftrightarrow$

$$\Phi_\rho(P_{0,h}) \geq \inf_{\mathcal{N}} P_{0,h} \text{ pour tout } h.$$

Γ fonction sur $\mathbb{R}^d$.

- $\delta_y(A) = \ell(A \cap (A+y))$, $y \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{M}$.
- Les fonctions δ_y génèrent $\mathscr{P}$ l'espace des fonctions de la forme

$$P_{\alpha,y} : A \in \mathcal{M} \mapsto c + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \delta_{y_i}(A)$$

pour $c \in \mathbb{R}, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{R}^q$, $y = (y_1, \dots, y_q) \in (\mathbb{R}^d)^q$.

- Γ est dit positif (abus de langage) si

$$\Phi_\Gamma(P_{\alpha,y}) := c + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \Gamma(y_i) \geq 0 \text{ dès que } P_{\alpha,y} \geq 0.$$

- Définitions similaires pour $\overline{\Gamma}$.

Cadre général

- $\mathcal{A}$: espace mesurable
- $\mathscr{P}$: espace de fonctions sur $\mathcal{A}$ (contenant les constantes)
- Φ : forme linéaire sur $\mathscr{P}$.
- On dit que Φ est **réalisable** si il existe un élément aléatoire $X \in \mathcal{A}$ tel que

$$\Phi(P) = \mathbf{E}P(X), P \in \mathscr{P}.$$

- Condition nécessaire : Φ **doit etre positif**,

$$P \geq 0 \Rightarrow \Phi(P) \geq 0 \quad \text{OU} \quad \Phi(P) \geq \inf_{\mathcal{A}} P, P \in \mathscr{P}.$$

Théorème (Kantorovitch)

Si Φ est positive sur $\mathscr{P}$, elle peut s'étendre à un opérateur positif Φ' sur l'espace $\mathscr{C} + \mathscr{P}$ ($\mathscr{C}$: fonctions continues bornées.)

L'opérateur Φ' peut alors se représenter par une **quasi-mesure**, pour tout mesurable A,

$$\mu : A \mapsto \Phi'(1_A)$$

vérifie l'axiome d'additivité **finie** pour les mesures. En ce sens Φ est **algébriquement compatible** avec une mesure.
Mais rien n'assure que μ puisse etre σ-additive. On a

Théorème (Riesz-Markov)

Si $\mathcal{A}$ est compact et $P \in \mathscr{P}$ continue, μ peut-etre une mesure.

Sinon, il faut trouver un moyen de vérifier la σ-additivité.

Est-il possible d'exprimer séparément les problèmes

- Φ est un opérateur positif (**Positivité**)
- Son extension Φ' est σ-additive (**Régularité**)

En règle générale non, car ça va dépendre de l'extension Φ'.

Théorème (Kuna, Lebowitz, Speer 2011)

Soit

$$P_{c,h,\alpha}(\eta) = P_{c,h}(\eta) + \alpha \mathrm{card}(\eta)^3, \quad \eta \in \mathcal{N}, P_{c,h} \in \mathscr{P}, \alpha \in \mathbb{R}$$

et $\mathscr{P}' = \{P_{c,h,\alpha}\}$. *Alors si* Φ *peut etre étendue positivement sur* $\mathcal{P}'$, Φ *est réalisable (par* η *tel que* $\mathbf{E}\mathrm{card}(\eta)^3 < \infty$*).*

Module de régularité

On introduit une fonction auxiliaire χ qui va **dominer** les fonctions de $\mathscr{P}$:

Definition

$\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ est un **module de régularité** si pour tout $P \in \mathscr{P}$,

$$H_P = \{\chi \leq P\}$$

est relativement compact (petit), et χ est SCI.

Le problème : Existe-t-il X tel que

$$\begin{cases} \Phi(P) = \mathbf{E}P(X), P \in \mathscr{P}, \\ \mathbf{E}\chi(X) < \infty \end{cases}$$

va etre dans certains cas plus facile à résoudre.

Exemple de modules de régularités

- Soit $E = [0,1]^d$, et

$$\chi(\eta) = \sum_{x \neq y \in \eta} \|x - y\|^{-d-1}, \quad \eta \in \mathcal{N}$$

  χ est grand quand η a des points proches.

- Ensembles aléatoires :

$$\chi(X) = \mathrm{per}(X)$$

  avec $\mathrm{per}(A) = \sup\{\int_A \mathrm{div}(\varphi) : \|\varphi\|_\infty \leq 1, \varphi\, \mathcal{C}^\infty\} = \mathrm{Var}(1_A)$.

- χ controle la "régularité" de X en un certain sens..
- On appelle **élément aléatoire régulier** un X tel que $\mathbf{E}\chi(X) < \infty$.
- Le problème $\Phi(P) = \mathbf{E}P(X), \mathbf{E}\chi(X) < \infty$ est un **problème de réalisabilité avec condition de régularité**

Théorème

(notation précédente) On suppose que chaque $P \in \mathscr{P}$ est continu sur chaque ensemble $H_Q = \{\chi \leq Q\}$ pour tout $Q \in \mathscr{P}$. Φ est réalisable par X régulier ssi Φ admet une extension positive sur $\mathscr{P} + \mathbb{R}\chi$.

Decouplage du problème

- Le problème ne se formule qu'en termes de Φ (et pas d'une extension Φ').
- **Heuristique** : si $\chi = \lim_n \uparrow P_n$, alors on espère que

$$\Phi(\chi) := \sup_n \Phi(P_n)$$

étend Φ de manière positive sur $\mathscr{P} + \mathbb{R}\chi$. (Il y a en fait de grosses difficultés techniques.)
On a alors la réalisabilité de Φ ssi Φ est **positif** et **régulier** :

$$\sup_n \Phi(P_n) < \infty.$$

Cas où

$$\chi(\eta) = \sum_{x \neq y \in \eta} \|x - y\|^{-d-1}, \quad \eta \in \mathcal{N}.$$

On a

$$P_n(\eta) = \sum_{x \neq y \in \eta} (n \wedge \|x - y\|^{-d-1}) \to \chi(\eta),$$

Théorème

ρ réalisable par X régulier ($\mathbf{E}\chi(X) < \infty$) ssi Φ_ρ **positif** *et*

$$\sup_n \int_{E \times E} (n \wedge \|x - y\|^{-d-1}) \rho(dx, dy)$$
$$= \int_{E \times E} \|x - y\|^{-d-1} \rho(dx, dy) < \infty \quad (\textit{régulier}).$$

Périmètre

Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique, alors (inspiré de Galerne 2011)

$$2n \sum_{i=1}^{d} \left(\Gamma_X\left(\frac{1}{n} e_i\right) - \Gamma_X(0) \right) \to \mathrm{per}'(X) \text{ périmètre anisotrope,}$$

où $\mathrm{per} \leq \mathrm{per}' \leq \sqrt{d}\,\mathrm{per}$.

Théorème

Sur $[0,1]^d$: Γ réalisable par X mesurable aléatoire tel que

$$\mathbf{E}\mathrm{per}(X) < \infty$$

ssi Γ positive et Lipschitz (Régularité).

Suite

- Comment passer aux fermés aléatoires ?
- La condition de régularité sur les processus ponctuels peut n'imposer que

$$\int \rho(dx, dy)\|x - y\|^{-d} < \infty,$$

et donc une répulsivité des points (l'indifférence entre les points du processus de Poisson ne passe pas).
- Comment caractériser la positivité ?

Formulation du problème

On cherche à caractériser différement la condition

$$\int_{E\times E} p(x,y)h(x,y)\mu(dx,dy) \geq \inf_{\mathcal{M}} \int_{E\times E} 1_{x,y\in A} h(x,y)\mu(dx,dy)$$
$$\langle p,h\rangle \geq \langle h, 1_{A\times A}\rangle, A\in\mathcal{M} \qquad (*)$$

pour h fonction test.

Remarque

L'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions $p(x,y)$ qui le vérifient est un convexe. Les equations (*) sont les inégalités convexes caractérisant $\mathcal{P}$.

Les $1_{A\times A}$ contiennent les points extremaux du convexes.

Cas fini

- Caractériser $\mathcal{P}$: caractériser l'ensemble des covariances de vecteurs aléatoires indexés par E et à valeurs dans $\{0,1\}$.
- $\Leftrightarrow$ caractériser l'ensemble des covariances de vecteurs aléatoires indexés par E et à valeurs dans $\{-1,1\}$ (passage affine).

Problème

Caractériser le convexe formé par les "covariances unitaires"

$$u_X(x,y) = \mathbf{E}\bar{X}(x)\bar{X}(y)$$

où $\bar{X}(x) = 1 - 2.1_{\{x \in X\}}, x \in E$, *est un processus aléatoire à valeurs dans* $\{-1,1\}$.

Soit $u = u_X \in \mathcal{U}$. Soit la loi de X,

$$\mathbf{P}(X = A) = p_A \text{ pour } A \subset E.$$

Alors

$$u_X(x,y) = \mathbf{E}\bar{X}(x)\bar{X}(y) = \sum_{A \subset E} p_A u_A(x,y).$$

Les $u_A, A \subset E$ sont les points extremaux de $\mathcal{U}$. Il y en a 2^{N-1}. $\mathcal{U}$ est donc un polytope de $\mathbb{R}^{(N(N-1))/2}$.

Conjecture de Matheron

Conjecture (Matheron 1976)

$u \in \mathcal{U}$ si et seulement si pour tout vecteur $e = (e_1, \in, e_d) \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\sum_{i=1}^d e_i$ impair, alors

$$\sum_{i,j} e_i e_j u(i,j) \geq 1.$$

Cette condition est nécssaire car si en effet $u = u_X \in \mathcal{U}$, $\sum_i e_i X(i)$ est p.s. impair et

$$1 \leq \mathbf{E}(\sum_i e_i X(i))^2 = \sum_{i,j} e_i e_j u_{ij}.$$

Théorème

La conjecture est vraie si $\mathrm{card}(E) \leq 6$, *et fausse sinon.*