

Modélisation d'un fluide diphasique à faible nombre de Mach avec forts transferts de chaleur

Bérénice GREC¹

en collaboration avec S. DELLACHERIE, G. FACCANONI et Y. PENEL

¹MAP5 – Université de Paris

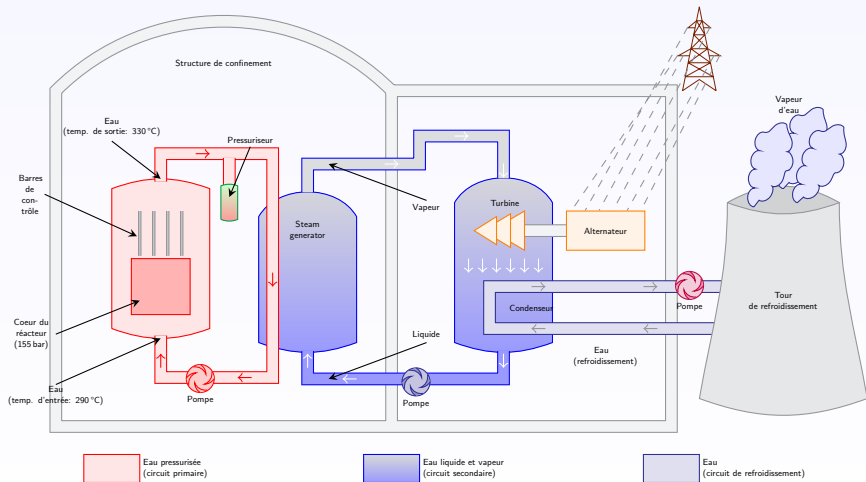
Séminaire EDP et applications, Poitiers, 17 juin 2021



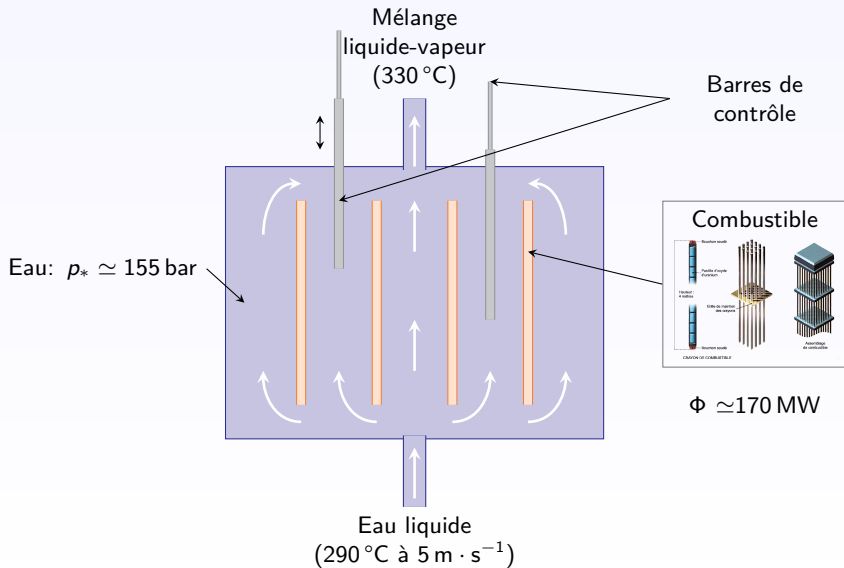
Plan de l'exposé

- 1 Contexte
- 2 Loi d'état et prise en compte du changement de phase
- 3 Propriétés du modèle 3-LMNC
- 4 Enrichissement de la modélisation
- 5 Propriétés du modèle 4-LMNC
- 6 Régime de relaxation instantanée et couplage
- 7 Conclusion et perspectives

Réacteur à Eau Pressurisée (REP)



Coeur d'un Réacteur à Eau Pressurisée (REP)



Faible nombre de Mach : quel modèle pour ce régime ?

Régime nominal

- ▶ Vitesse d'entrée : $|\mathbf{u}| \simeq 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- ▶ Vitesse du son à $p_0 = 155 \text{ bar}$ et $T = 300 \text{ °C}$: $c_\ell^* \simeq 1.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- ▶ nombre de Mach (mesure la compressibilité de l'écoulement) :

$$\text{Ma} = \frac{|\mathbf{u}|}{c_\ell^*} \simeq 5 \times 10^{-3} \ll 1$$

Choix du modèle :

- ▶ Navier-Stokes/Euler compressible ?
- ▶ Incompressible ?
- ▶ Modèle adapté au régime bas Mach ?

Phénomènes acoustiques négligeables (pas d'ondes de choc)

MAIS grands transferts de chaleur : $\text{div } \mathbf{u} \neq 0$

⇒ Modèle asymptotique à bas nombre de Mach

De Navier-Stokes compressible au modèle LMNC

Système de Navier-Stokes compressible sans diffusion thermique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{g} \\ \partial_t(\rho h) + \operatorname{div}(\rho h \mathbf{u}) = \Phi + \partial_t p + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u} \end{cases}$$

► Inconnues

- $(t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{u}$: vitesse
- $(t, \mathbf{x}) \mapsto p$: pression
- $(t, \mathbf{x}) \mapsto h$: enthalpie
- ρ : densité liée à h et p par la loi d'état

► Données

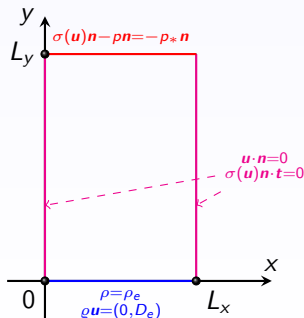
- $(t, \mathbf{x}) \mapsto \Phi \geq 0$: densité de puissance
- \mathbf{g} : gravité
- $\sigma(\mathbf{u})$: tenseur de contraintes (viscosité)

De Navier-Stokes compressible au modèle LMNC

Système de Navier-Stokes compressible sans diffusion thermique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{g} \\ \partial_t(\rho h) + \operatorname{div}(\rho h \mathbf{u}) = \Phi + \partial_t p + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u} \end{cases}$$

► Conditions limites



De Navier-Stokes compressible au modèle LMNC

Système de Navier-Stokes compressible sans diffusion thermique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla p = \rho \mathbf{g} \\ \partial_t(\rho h) + \operatorname{div}(\rho h \mathbf{u}) = \Phi + \partial_t p + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases}$$

- ▶ Adimensionnement $\text{Ma} = \varepsilon$ et développement asymptotique

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

- ▶ $\nabla p^{(0)} = \nabla p^{(1)} = 0$ & condition limite de sortie indépendante de t

$$\implies p(t, \mathbf{x}) = p_* + \varepsilon^2 \bar{p}(t, \mathbf{x}).$$

La pression est décomposée entre une partie thermodynamique constante p_* et une partie dynamique d'ordre $\varepsilon^2 \bar{p}$.

Modèle à faible nombre de Mach

Modèle 3-LMNC

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\Phi}{\zeta(h, p_*)} \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \tau(h, p_*) \nabla \bar{p} = \tau(h, p_*) \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{g} \\ \partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h = \tau(h, p_*) \Phi \end{cases}$$

- ▶ Equation d'état sur $\tau = 1/\rho$ (volume spécifique)
- ▶ Coefficient de compressibilité $1/\zeta(h, p_*) = \frac{\partial \tau}{\partial h}(h, p_*)$
- ▶ Tenseur de contraintes $\sigma(\mathbf{u}) = \mu(h, p_*) (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \eta(h, p_*) (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{Id}$

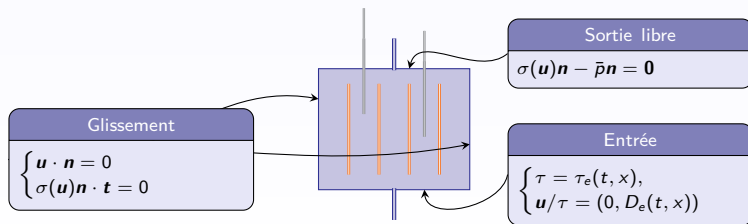
Nombreux travaux théoriques et numériques sur les modèles à bas nombre de Mach : Klainerman & Majda ('81, '82), Schochet ('94), Desjardins, Grenier, Lions & Masmoudi ('99), Danchin ('01, '05), Alazard ('05), Klein ('95), Guillard *et al.* ('99, '04, '08), Dellacherie *et al.* ('10, '13)...

Modèle à faible nombre de Mach

Modèle 3-LMNC

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\Phi}{\zeta(h, p_*)} \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \tau(h, p_*) \nabla \bar{p} = \tau(h, p_*) \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{g} \\ \partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h = \tau(h, p_*) \Phi \end{cases}$$

Conditions limites



Plan de l'exposé

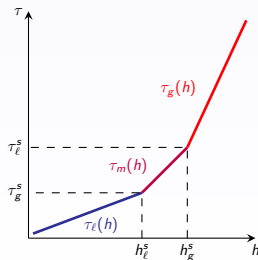
- 1 Contexte
- 2 Loi d'état et prise en compte du changement de phase**
- 3 Propriétés du modèle 3-LMNC
- 4 Enrichissement de la modélisation
- 5 Propriétés du modèle 4-LMNC
- 6 Régime de relaxation instantanée et couplage
- 7 Conclusion et perspectives

Loi d'état diphasique

- ▶ Le liquide $\kappa = \ell$ et la vapeur $\kappa = g$ sont caractérisés par leurs propriétés thermodynamiques : $(h, p_*) \mapsto \tau_\kappa$
- ▶ Pression thermodynamique p_* constante \rightsquigarrow **dépendance non précisée**
- ▶ Dans le mélange, équilibre entre les phases liquides et vapeur : $T = T^s$.
On définit les valeurs à saturation

$$h_\kappa^s \stackrel{\text{def}}{=} h_\kappa(T^s), \quad \tau_\kappa^s \stackrel{\text{def}}{=} 1/\rho_\kappa^s$$

$$\tau(h) = \begin{cases} \tau_\ell(h), & \text{si } h \leq h_\ell^s, \\ \tau_m(h) & \text{si } h_\ell^s < h < h_g^s, \\ \tau_g(h), & \text{si } h \geq h_g^s. \end{cases}$$



Loi d'état dans le mélange

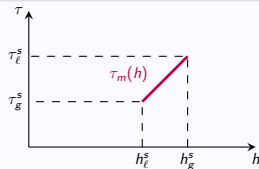
Soit φ la fraction de masse de la phase vapeur. Pour $h \in [h_\ell^s; h_g^s]$

Mélange isobare et isotherme

$$\begin{cases} \tau = \varphi \tau_g^s + (1 - \varphi) \tau_\ell^s, \\ h = \varphi h_g^s + (1 - \varphi) h_\ell^s. \end{cases}$$

Volume spécifique

$$\tau_m(h) = \frac{h - q_m}{\zeta_m}$$



où

$$\zeta_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h_g^s - h_\ell^s}{\tau_g^s - \tau_\ell^s},$$

$$q_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tau_g^s h_\ell^s - \tau_\ell^s h_g^s}{\tau_g^s - \tau_\ell^s}$$

Fraction de masse

$$\varphi_m(h) = \frac{h - h_\ell^s}{h_g^s - h_\ell^s}$$

Loi d'état pour les phases pures

Loi des gaz raidis (SG)

$$\tau_{\kappa}(h) = \frac{\gamma_{\kappa} - 1}{\gamma_{\kappa}} \frac{h - q_{\kappa}}{p_* + \pi_{\kappa}}$$

- ▶ $\gamma_{\kappa} > 1$ coefficient adiabatique
- ▶ q_{κ} énergie de liaison

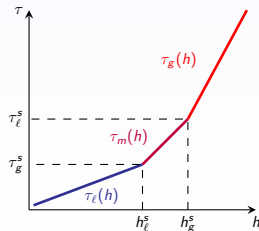
▶ π_{κ} pression de référence

On obtient

$$1/\zeta_{\kappa} = \left. \frac{\partial \tau}{\partial h} \right|_{p_*} = \frac{\gamma_{\kappa} - 1}{\gamma_{\kappa}} \frac{p_*}{p_* + \pi_{\kappa}} \quad \text{indépendant de } h$$

Nouvelle expression de τ

$$\tau_{\kappa}(h) = \frac{h - q_{\kappa}}{\zeta_{\kappa}}$$



Plan de l'exposé

- 1 Contexte
- 2 Loi d'état et prise en compte du changement de phase
- 3 Propriétés du modèle 3-LMNC**
- 4 Enrichissement de la modélisation
- 5 Propriétés du modèle 4-LMNC
- 6 Régime de relaxation instantanée et couplage
- 7 Conclusion et perspectives

Modèle en 1D

$$\begin{cases} \partial_y v = \frac{\Phi}{\zeta(h)} \\ \partial_t v + v \partial_y v + \tau(h) \partial_y \bar{p} = \tau(h) \partial_y (\mu \partial_x v) - g \\ \partial_t h + v \partial_y h = \tau(h) \Phi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \partial_y \tau &= \tau'(h) \partial_y h = \frac{\partial_y h}{\zeta(h)} \\ &= \frac{1}{\zeta(h)} \frac{\tau(h)}{v} \Phi = \frac{\tau(h)}{v} \partial_y v \end{aligned}$$

Solution **stationnaire** pour une loi d'état quelconque

① $v/\tau(h)$ est constant (égal à D_e), donne la **vitesse** : $v(y) = D_e \tau(h(y))$

② **Enthalpie** : $h(y) = h_e + \frac{1}{D_e} \int_0^y \Phi(z) dz$

③ **Pression dynamique \bar{p}** : intégration de la deuxième équation

► Existence de solutions exactes avec changement de phase en 1D (méthode des caractéristiques)

Modèle en 2D

Existence (en temps court) pour le modèle LMNC

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = \Phi / \zeta(h) \\ \left(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \tau(h) \nabla \bar{p} = \tau(h) \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) + \mathbf{g} \\ \left(\partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h \right) = \tau(h) \Phi \end{cases}$$

En système fermé (glissement sur tous les bords)

- ▶ Linéarisation (itérées de Picard)
- ▶ Estimations d'énergie : itérées bornées dans des espaces fonctionnels réguliers
 - ▶ Equation de transport
 - ▶ Equation type Navier-Stokes (décomposition de Hodge)
- ▶ Contraction dans des espaces fonctionnels moins réguliers
- ▶ Grönwall \rightsquigarrow convergence, existence en temps court
- ▶ Unicité

Modèle en 2D

Existence (en temps court) pour le modèle LMNC

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = \Phi / \zeta(h) \\ \left(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \tau(h) \nabla \bar{p} = \tau(h) \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) + \mathbf{g} \\ \left(\partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h \right) = \tau(h) \Phi \end{cases}$$

Avec les conditions limites physiques

- ▶ Equation type Navier-Stokes :

↪ adaptation de la condition limite en sortie (sortie libre)

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} - \bar{p}\mathbf{n} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^-}{2\tau} = 0$$

↪ adaptation de la décomposition de Hodge aux conditions limites

- ▶ Equation de transport :

↪ on ne contrôle pas le signe du terme en sortie...

↪ utilisation de la formule explicite pour les caractéristiques :

- ▶ compatibilité entre les domaines utilisant condition initiale/limite...
- ▶ régularité aux interfaces entre ces domaines...

Plan de l'exposé

- 1 Contexte
- 2 Loi d'état et prise en compte du changement de phase
- 3 Propriétés du modèle 3-LMNC
- 4 Enrichissement de la modélisation**
- 5 Propriétés du modèle 4-LMNC
- 6 Régime de relaxation instantanée et couplage
- 7 Conclusion et perspectives

Modèle 4-LMNC

Hiérarchie de modèles diphasiques

- ▶ Prise en compte de possibles **déséquilibres entre les phases** (pressions, températures, potentiels chimiques, vitesses)
- ▶ Ici, modèle **homogène (une vitesse)** avec égalité de pressions et températures
- ▶ **Terme source de relaxation** (sur la **fraction de masse**) vers une fraction d'équilibre (saturation)

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \varrho + \partial_y(\varrho v) = 0 \\ \partial_t(\varrho h) + \partial_y(\varrho h v) = \Phi \\ \partial_t(\varrho \varphi) + \partial_y(\varrho \varphi v) = \varrho \mathcal{R}_\varepsilon(\varrho, \varphi) \\ \partial_t(\varrho v) + \partial_y(\varrho v^2 + \bar{p}) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow[\mathcal{R}(1D)]{\varrho = \frac{1}{\tau}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y v = \Phi \frac{\partial \tau}{\partial h} \Big|_\varphi + \frac{\mathcal{R}_\varepsilon(h, \varphi)}{\tau(h, \varphi)} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \Big|_h \\ \partial_t h + v \partial_y h = \Phi \tau(h, \varphi) \\ \partial_t \varphi + v \partial_y \varphi = \mathcal{R}_\varepsilon(h, \varphi) \end{array} \right.$$

- ▶ φ : **fraction de masse**
- ▶ \mathcal{R}_ε : **terme source (interactions entre les phases)**
- ▶ $\tau(h, \varphi)$ donné par la loi d'état

Modèle 4-LMNC

Hiérarchie de modèles diphasiques

- ▶ Prise en compte de possibles **déséquilibres entre les phases** (pressions, températures, potentiels chimiques, vitesses)
- ▶ Ici, modèle **homogène (une vitesse)** avec égalité de pressions et températures
- ▶ **Terme source de relaxation** (sur la **fraction de masse**) vers une fraction d'équilibre (saturation)

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_y(\varrho v) = 0 \\ \partial_t(\varrho h) + \partial_y(\varrho h v) = \Phi \\ \partial_t(\varrho \varphi) + \partial_y(\varrho \varphi v) = \varrho \mathcal{R}_\varepsilon(\varrho, \varphi) \\ \partial_t(\varrho v) + \partial_y(\varrho v^2 + \bar{p}) = 0 \end{cases} \xrightarrow[\mathbb{R}(1D)]{\varrho = \frac{1}{\tau}} \begin{cases} \partial_y v = \Phi \left. \frac{\partial \tau}{\partial h} \right|_\varphi + \frac{\mathcal{R}_\varepsilon(h, \varphi)}{\tau(h, \varphi)} \left. \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \right|_h \\ \partial_t h + v \partial_y h = \Phi \tau(h, \varphi) \\ \partial_t \varphi + v \partial_y \varphi = \mathcal{R}_\varepsilon(h, \varphi) \end{cases}$$

- ▶ φ : fraction de masse
- ▶ \mathcal{R}_ε : terme source (interactions entre les phases)
- ▶ $\tau(h, \varphi)$ donné par la loi d'état

Loi d'état

- ▶ Comme précédemment :
 - ▶ Phases pures
 - ▶ Définition des valeurs à saturation
- ▶ Définition du mélange

Mélange isobare et isotherme

$$\begin{cases} \tau \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \tau_g(T) + (1 - \varphi) \tau_\ell(T), \\ h \stackrel{\text{def}}{=} \varphi h_g(T) + (1 - \varphi) h_\ell(T). \end{cases}$$

- ✓ $h_\kappa(T)$ et $\tau_\kappa(T)$ donnés par la loi des SG
- ✓ éliminer T

$$\tau(h, \varphi) = \frac{h - q(\varphi)}{\zeta(\varphi)}$$

avec

$$q(\varphi) = \varphi q_g(\varphi) + (1 - \varphi) q_\ell(\varphi), \quad \zeta(\varphi) = \frac{\varphi \zeta_g \tau_g^s + (1 - \varphi) \zeta_\ell \tau_\ell^s}{\varphi \tau_g^s + (1 - \varphi) \tau_\ell^s}$$

Terme de relaxation

- ▶ Terme source de relaxation \mathcal{R}_ε : échanges de masse entre les phases en un temps caractéristique ε

$$\mathcal{R}_\varepsilon(h, \varphi) = \frac{1}{\varepsilon} (\varphi^s(h) - \varphi)$$

- ▶ $\varphi^s(h)$: fraction de masse à saturation du mélange (égalités des potentiels de Gibbs entre les phases)

$$\varphi^s(h) = \begin{cases} 0, & \text{if } h \leq h_\ell^s, \\ \frac{h - h_\ell^s}{h_g^s - h_\ell^s}, & \text{if } h_\ell^s < h < h_g^s, \\ 1, & \text{if } h \geq h_g^s. \end{cases}$$

- ▶ Régime de relaxation instantanée si $\varepsilon \rightarrow 0$.

Plan de l'exposé

- 1 Contexte
- 2 Loi d'état et prise en compte du changement de phase
- 3 Propriétés du modèle 3-LMNC
- 4 Enrichissement de la modélisation
- 5 Propriétés du modèle 4-LMNC**
- 6 Régime de relaxation instantanée et couplage
- 7 Conclusion et perspectives

Propriétés du modèle en 1D

Proposition (Principe du maximum)

Si $\varphi_e, \varphi_0 \in [0, 1]$, alors $\varphi(t, x) \in [0, 1]$ pour tout (t, x) .

Proposition (Positivité)

Si $\varphi^s(h_e) > \varphi_e$ et $\varphi^s(h^0) > \varphi^0$, alors $\varphi^s(h(t, x)) > \varphi(t, x)$ pour tout (t, x) .

↪ positivité du terme source \mathcal{R}_ε

↪ "décalage de φ par rapport à h " : p.ex. h peut dépasser h_ℓ^s tandis que $\varphi = 0$.

- ▶ Preuve via expression "explicite" avec la méthode des caractéristiques
- ▶ Distinction des domaines (condition initiale, condition limite, changement de phase)

Solution stationnaire

- ▶ Enthalpie (identique à celle du 3-LMNC) $h(y) = h_e + \frac{1}{D_e} \int_0^y \Phi(x) \, dx$
- ▶ Vitesse $v(y) = D_e \tau(h(y), \varphi(y))$
- ▶ Fraction de masse φ solution de l'EDO $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{D_e} \frac{\mathcal{R}_\varepsilon(h(y), \varphi)}{\tau(h(y), \varphi)}$

Propriétés de la solution stationnaire

- ▶ “Pente” de l’enthalpie (Φ/D_e si Φ constant)
- ▶ Conservation de la masse (débit $v/\tau = D_e$) $\rightsquigarrow \tau \partial_y v = v \partial_y \tau$

▶ Eq. sur $\partial_y v \rightsquigarrow \tau \partial_y v = \tau \frac{\Phi}{\zeta(\varphi)} + \mathcal{R}_\varepsilon \left. \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \right|_h$

▶ $\tau(h, \varphi) \rightsquigarrow \partial_y \tau = \frac{1}{\zeta(\varphi)} \partial_y h + \left. \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \right|_h \partial_y \varphi$

▶ Eq. (statio.) sur h et φ : $v \partial_y h = \tau \Phi$, $v \partial_y \varphi = \mathcal{R}_\varepsilon$.

Schéma équilibre

Préservation au niveau discret de la propriété

$$\tau_i(v_i - v_{i-1}) = v_i(\tau_i - \tau_{i-1})$$

$$\begin{cases} \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + v_i^n \frac{h_i^n - h_{i-1}^n}{\Delta y} = \Phi_i^n \tau_i^n \\ \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{\Delta t} + v_i^n \frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{\Delta y} = R_i^{n+1, n+1} \\ \frac{v_i^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}}{\Delta y} = \frac{1}{\zeta_i^{n+1}} S_i^{n+1} \end{cases}$$

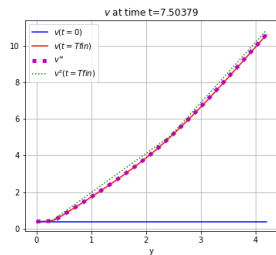
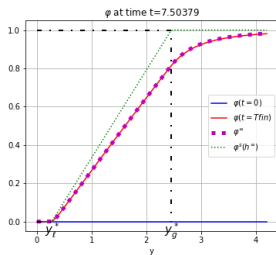
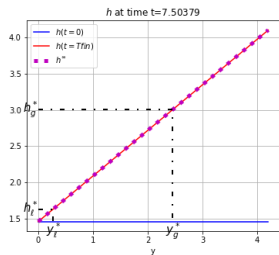
where

$$R_i^{n+1, n+1} = \frac{1}{\varepsilon} (\varphi^s(h_i^{n+1}) - \varphi_i^{n+1}), \quad \zeta_i^n = \frac{\varphi_i^n \zeta_g \tau_g^s + (1 - \varphi_i^n) \zeta_\ell \tau_\ell^s}{\varphi_i^n \tau_g^s + (1 - \varphi_i^n) \tau_\ell^s},$$

$$S_i^{n+1} = \Phi_i^{n+1} - \frac{R_i^{n+1, n+1}}{\tau_i^{n+1}} \left[(q_g - q_\ell) - \frac{\tau_{i-1}^{n+1} (\zeta_g - \zeta_\ell) \tau_g^s \tau_\ell^s}{(\varphi_i^n \tau_g^s + (1 - \varphi_i^n) \tau_\ell^s) (\varphi_{i-1}^n \tau_g^s + (1 - \varphi_{i-1}^n) \tau_\ell^s)} \right]$$

Résultats numériques

- ▶ Situation initiale : liquide pur
- ▶ 100 points de discrétisation, CFL=0.99
- ▶ $\varepsilon = 10^{-1}$
- ▶ Comportement “équilibre” vérifié à 10^{-15} près
 - ▶ “Pente” de l’enthalpie
 - ▶ Conservation du débit $v/\tau = D_e$
- ▶ On vérifie aussi les propriétés théoriques (principe du max., positivité de \mathcal{R}_ε)
 - ▶ Décalage de φ par rapport à h



Plan de l'exposé

- 1 Contexte
- 2 Loi d'état et prise en compte du changement de phase
- 3 Propriétés du modèle 3-LMNC
- 4 Enrichissement de la modélisation
- 5 Propriétés du modèle 4-LMNC
- 6 Régime de relaxation instantanée et couplage**
- 7 Conclusion et perspectives

Convergence formelle

$$\begin{cases} \partial_y v_4 = \Phi \frac{\partial \tau}{\partial h} \Big|_{\varphi} + \frac{\mathcal{R}_\varepsilon(h_4, \varphi_4)}{\tau(h_4, \varphi_4)} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \Big|_h \\ \partial_t h_4 + v_4 \partial_y h_4 = \Phi \tau(h_4, \varphi_4) \\ \partial_t \varphi_4 + v_4 \partial_y \varphi_4 = \frac{1}{\varepsilon} (\varphi^s(h_4) - \varphi_4) \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} \partial_y v_3 = \Phi \tau'(h_3) \\ \partial_t h_3 + v \partial_y h_3 = \Phi \tau(h_3) \end{cases}$$

Proposition (Convergence formelle)

$$(v_4, h_4, \varphi_4) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (v_3, h_3, \varphi^s(h_3))$$

- ▶ Développement asymptotique de chaque variable en ε
- ▶ Terme source raide, ordre ε^{-1} : $\rightsquigarrow \varphi_4^0 = \varphi^s(h_4^0)$
- ▶ Ordre ε^0 : $\partial_t \varphi_4^0 + v_4^0 \partial_y \varphi_4^0 = \varphi^{s'}(h_4^0) (\partial_t h_4^0 + v_4 \partial_y h_4^0)$
- ▶ Lois d'état $\tau(h, \varphi^s(h)) = \tau(h) \rightsquigarrow h_4^0 \rightarrow h_3$

$$\frac{\partial \tau}{\partial h} \Big|_{\varphi} + \varphi^{s'}(h) \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \Big|_h = \frac{d}{dh} \tau(h, \varphi^s(h)) = \tau'(h) \rightsquigarrow v_4^0 \rightarrow v_3$$

Préservation de l'asymptotique ($\varepsilon \rightarrow 0$)

Proposition (Schéma AP)

Le schéma ci-dessous est faiblement AP

$$\left\{ \begin{array}{l} h^* = h^n + \Delta t \Phi \tau(h^n, \varphi^n) \\ \varphi^* = \varphi^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\varphi^s(h^*) - \varphi^*) \\ D(v^{n+1}) = \frac{\Phi}{\zeta(\varphi^*)} + \frac{1}{\tau(h^n, \varphi^n)} \frac{\varphi^s(h^*) - \varphi^*}{\varepsilon} A(h^n, \varphi^n, \varphi^*) \\ h^{n+1} = h^* - \Delta t v^{n+1} D(h^*) \\ \varphi^{n+1} = \varphi^* - \Delta t v^{n+1} D(\varphi^*) \end{array} \right.$$

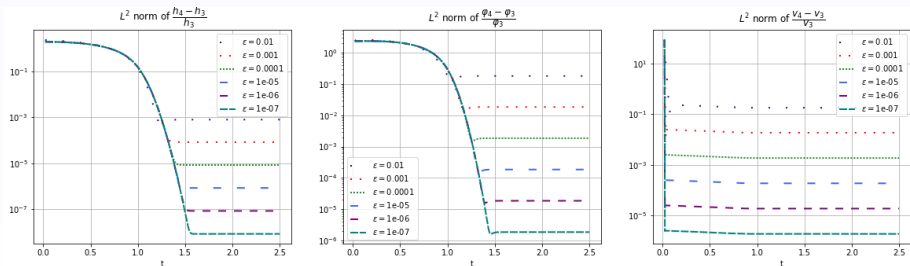
où $\partial_\varphi \tau$ est approché par

$$A(h^n, \varphi^n, \varphi^*) = -\frac{1}{\zeta(\varphi^*)\zeta(\varphi^n)} \left[(q_g - q_\ell)\zeta(\varphi^n) + (h^n - q(\varphi^n)) \frac{\zeta(\varphi^*) - \zeta(\varphi^n)}{\varphi^* - \varphi^n} \right]$$

et $D(\cdot)$ est un opérateur de discrétisation de $\partial_y \cdot$.

Résultats numériques

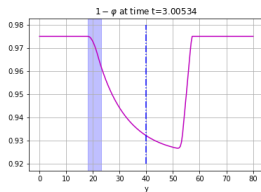
- ▶ 200 points de discrétisation, pas de temps fixé indépendant de ε
- ▶ Variations de ε de 10^{-2} à 10^{-7}
- ▶ Conditions de bord identiques pour les deux modèles : $h_e = 1.01h_\ell^5$
- ▶ Conditions initiales différentes entre les deux modèles et mal préparées
 - ▶ $h_4^0 \neq h_3^0 = h_e$
 - ▶ $\varphi_4^0 \neq \varphi^s(h_4^0)$
- ▶ Comportement préservant l'asymptotique "relaxé"



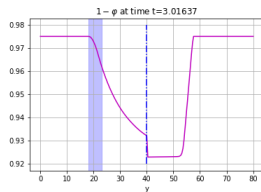
Couplage spatial

- ▶ 200 points de discrétisation, pas de temps fixé indépendant de ε
- ▶ Chauffage (Φ) localisé dans une partie du circuit primaire
- ▶ $\varphi_e = 0.025$, temps final 3 s
- ▶ Interface (fictive) au milieu du domaine

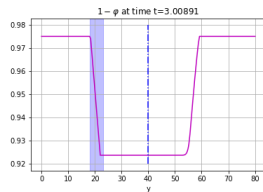
$$\varepsilon(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y < 40 \text{ m,} \\ 10^{-10} & \text{if } y > 40 \text{ m.} \end{cases}$$



(a) $1 - \varphi$ for $\varepsilon = 1$



(b) $1 - \varphi$ for $\varepsilon(y)$



(c) $1 - \varphi$ for $\varepsilon = 10^{-10}$

cf. [Ambroso, Hérard & Hurisse, '09]

Plan de l'exposé

- 1 Contexte
- 2 Loi d'état et prise en compte du changement de phase
- 3 Propriétés du modèle 3-LMNC
- 4 Enrichissement de la modélisation
- 5 Propriétés du modèle 4-LMNC
- 6 Régime de relaxation instantanée et couplage
- 7 Conclusion et perspectives**

Conclusion et perspectives

Conclusion

- ▶ Modèles à faible nombre de Mach prenant en compte les transferts de chaleur, avec ou sans retard sur les échanges de masse
- ▶ Solutions stationnaires, schéma équilibre
- ▶ Convergence formelle entre les modèles, schéma AP

Travaux en cours et perspectives

- ▶ Analyse des modèles : régularité de l'équation de transport, puis existence en temps long
- ▶ Développement d'une hiérarchie de modèles (relaxation des différents équilibres), convergences des modèles
- ▶ Couplage avec des équations simplifiées de neutronique pour déterminer Φ
- ▶ Enrichissement de la modélisation thermodynamique

Merci de votre attention!

