Modélisation d'un fluide diphasique à faible nombre de Mach avec forts transferts de chaleur

Bérénice Grec[1]

en collaboration avec S. Dellacherie, G. Faccanoni et Y. Penel

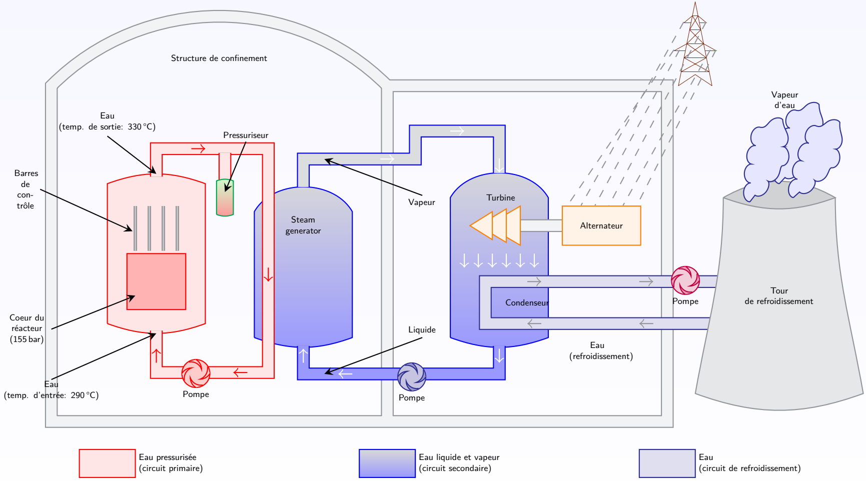
[1]MAP5 – Université Paris Cité

Séminaire EDP, Versailles, 7 avril 2022

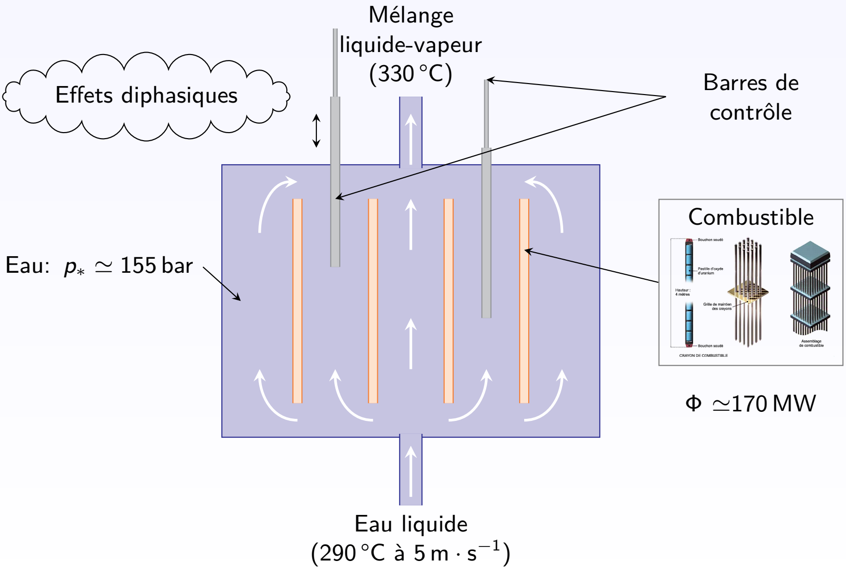
Plan de l'exposé

1. Contexte
2. Loi d'état et prise en compte du changement de phase
3. Propriétés du modèle 3-LMNC
4. Enrichissement de la modélisation diphasique
5. Propriétés du modèle 4-LMNC
6. Régime de relaxation instantanée et couplage
7. Conclusion et perspectives

Réacteur à Eau Pressurisée (REP)



Coeur d'un Réacteur à Eau Pressurisée (REP)



Faible nombre de Mach : quel modèle pour ce régime ?

Régime nominal

- Vitesse d'entrée : $|\boldsymbol{u}| \simeq 5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
- Vitesse du son à $p_0 = 155\,\mathrm{bar}$ et $T = 300\,°\mathrm{C}$: $c_\ell^* \simeq 1.0 \times 10^3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
- nombre de Mach (mesure la compressibilité de l'écoulement) :

$$\mathrm{Ma} = \frac{|\boldsymbol{u}|}{c_\ell^*} \simeq 5 \times 10^{-3} \ll 1$$

Choix du modèle :

- Navier-Stokes/Euler compressible ?
- Incompressible ?
- Modèle adapté au régime bas Mach ?

Phénomènes acoustiques négligeables (pas d'ondes de choc)
MAIS grands transferts de chaleur : $\operatorname{div} \boldsymbol{u} \neq 0$
$\Rightarrow$ Modèle asymptotique à bas nombre de Mach

De Navier-Stokes compressible au modèle LMNC

Système de Navier-Stokes compressible sans diffusion thermique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \mathrm{div}\, \sigma(\boldsymbol{u}) + \nabla p = \rho \boldsymbol{g} \\ \partial_t(\rho h) + \mathrm{div}(\rho h \boldsymbol{u}) = \Phi + \partial_t p + \boldsymbol{u} \cdot \nabla p + \sigma(\boldsymbol{u}) : \nabla \boldsymbol{u} \end{cases}$$

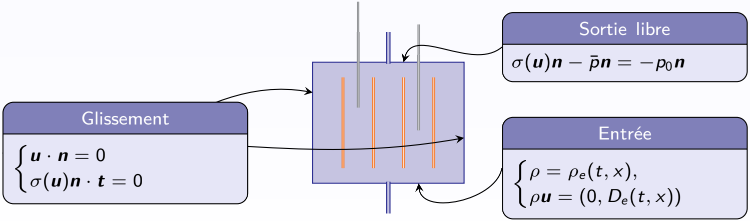
- Inconnues
  - $(t, \boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{u}$: vitesse
  - $(t, \boldsymbol{x}) \mapsto p$: pression
  - $(t, \boldsymbol{x}) \mapsto h$: enthalpie
  - ρ : densité liée à h et p par la loi d'état
- Données
  - $(t, \boldsymbol{x}) \mapsto \Phi \geq 0$: densité de puissance
  - $\boldsymbol{g}$: gravité
  - $\sigma(\boldsymbol{u})$: tenseur de contraintes (viscosité)

De Navier-Stokes compressible au modèle LMNC

Système de Navier-Stokes compressible sans diffusion thermique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div} \sigma(\boldsymbol{u}) + \nabla p = \rho \boldsymbol{g} \\ \partial_t(\rho h) + \operatorname{div}(\rho h \boldsymbol{u}) = \Phi + \partial_t p + \boldsymbol{u} \cdot \nabla p + \sigma(\boldsymbol{u}) : \nabla \boldsymbol{u} \end{cases}$$

- Conditions limites



De Navier-Stokes compressible au modèle LMNC

Système de Navier-Stokes compressible sans diffusion thermique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div} \sigma(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla p = \rho \boldsymbol{g} \\ \partial_t(\rho h) + \operatorname{div}(\rho h \boldsymbol{u}) = \Phi + \partial_t p + \boldsymbol{u} \cdot \nabla p + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases}$$

- Adimensionnement $\mathrm{Ma} = \varepsilon$ et développement asymptotique

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

- $\nabla p^{(0)} = \nabla p^{(1)} = 0$ & condition limite de sortie indépendante de t

$$\Longrightarrow p(t, \boldsymbol{x}) = p_* + \varepsilon^2 \bar{p}(t, \boldsymbol{x}).$$

La pression est décomposée entre une partie thermodynamique constante p_* et une partie dynamique d'ordre ε^2 $\bar{p}$.

Modèle à faible nombre de Mach

Modèle 3-LMNC

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \dfrac{\Phi}{\zeta(h, p_*)} \\ \partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \tau(h, p_*)\nabla \bar{p} = \tau(h, p_*) \operatorname{div} \sigma(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{g} \\ \partial_t h + \boldsymbol{u} \cdot \nabla h = \tau(h, p_*)\Phi \end{cases}$$

- Equation d'état sur $\tau = 1/\rho$ (volume spécifique)
- Coefficient de compressibilité $1/\zeta(h, p_*) = \dfrac{\partial \tau}{\partial h}(h, p_*)$
- Tenseur de contraintes $\sigma(\boldsymbol{u}) = \mu(h, p_*) \left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T\right) + \eta(h, p_*)(\operatorname{div} \boldsymbol{u})\, \mathbf{Id}$

Nombreux travaux théoriques et numériques sur les modèles à bas nombre de Mach : Klainerman & Majda ('81, '82), Schochet ('94), Desjardins, Grenier, Lions & Masmoudi ('99), Danchin ('01, '05), Alazard ('05), Klein ('95), Guillard *et al.* ('99, '04, '08), Dellacherie *et al.* ('10, '13)...

Modèle à faible nombre de Mach

Modèle 3-LMNC

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \dfrac{\Phi}{\zeta(h, p_*)} \\ \partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \tau(h, p_*)\nabla \bar{p} = \tau(h, p_*) \operatorname{div} \sigma(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{g} \\ \partial_t h + \boldsymbol{u} \cdot \nabla h = \tau(h, p_*)\Phi \end{cases}$$

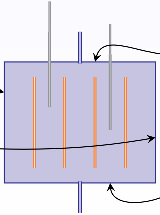
Conditions limites

Sortie libre

$\sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} - \bar{p}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$

Glissement

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \\ \sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{t} = 0 \end{cases}$$



Entrée

$$\begin{cases} \tau = \tau_e(t, x), \\ \boldsymbol{u}/\tau = (0, D_e(t, x)) \end{cases}$$

Plan de l'exposé

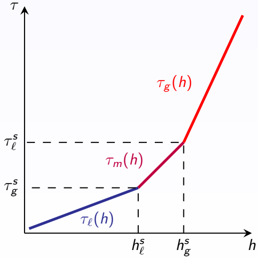
1. Contexte
2. Loi d'état et prise en compte du changement de phase
3. Propriétés du modèle 3-LMNC
4. Enrichissement de la modélisation diphasique
5. Propriétés du modèle 4-LMNC
6. Régime de relaxation instantanée et couplage
7. Conclusion et perspectives

Loi d'état diphasique

- Le liquide $\kappa = \ell$ et la vapeur $\kappa = g$ sont caractérisés par leurs propriétés thermodynamiques : $(h, p_*) \mapsto \tau_\kappa$
- Pression thermodynamique p_* constante $\rightsquigarrow$ dépendance non précisée
- Dans le mélange, équilibre entre les phases liquides et vapeur : $T = T^s$. On définit les valeurs à saturation

$$h^s_\kappa \stackrel{\text{def}}{=} h_\kappa\big(T^s\big), \qquad \tau^s_\kappa \stackrel{\text{def}}{=} 1/\rho^s_\kappa$$

$$\boxed{\tau(h) = \begin{cases} \tau_\ell(h), & \text{si } h \leq h^s_\ell, \\ \tau_m(h) & \text{si } h^s_\ell < h < h^s_g, \\ \tau_g(h), & \text{si } h \geq h^s_g. \end{cases}}$$



Loi d'état dans le mélange

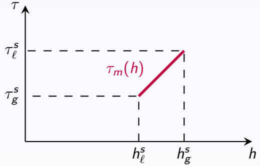
Soit φ la fraction de masse de la phase vapeur. Pour $h \in [h_\ell^s; h_g^s]$

Mélange isobare et isotherme

$$\begin{cases} \tau = \varphi \tau_g^s + (1-\varphi)\tau_\ell^s, \\ h = \varphi h_g^s + (1-\varphi) h_\ell^s. \end{cases}$$

Volume spécifique

$$\boxed{\tau_m(h) = \frac{h - q_m}{\zeta_m}}$$



où

$$\zeta_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h_g^s - h_\ell^s}{\tau_g^s - \tau_\ell^s}, \qquad q_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tau_g^s h_\ell^s - \tau_\ell^s h_g^s}{\tau_g^s - \tau_\ell^s}$$

Fraction de masse

$$\boxed{\varphi_m(h) = \frac{h - h_\ell^s}{h_g^s - h_\ell^s}}$$

Loi d'état pour les phases pures

Loi des gaz raidis (SG)

$$\tau_\kappa(h) = \frac{\gamma_\kappa - 1}{\gamma_\kappa} \frac{h - q_\kappa}{p_* + \pi_\kappa}$$

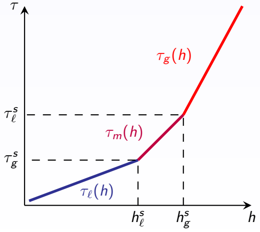
- $\gamma_\kappa > 1$ coefficient adiabatique
- q_κ énergie de liaison
- π_κ pression de référence

On obtient

$$1/\zeta_\kappa = \left.\frac{\partial \tau}{\partial h}\right|_{p_*} = \frac{\gamma_\kappa - 1}{\gamma_\kappa} \frac{p_*}{p_* + \pi_\kappa}$$ indépendant de h

Nouvelle expression de τ

$$\boxed{\tau_\kappa(h) = \frac{h - q_\kappa}{\zeta_\kappa}}$$



Plan de l'exposé

1. Contexte
2. Loi d'état et prise en compte du changement de phase
3. Propriétés du modèle 3-LMNC
4. Enrichissement de la modélisation diphasique
5. Propriétés du modèle 4-LMNC
6. Régime de relaxation instantanée et couplage
7. Conclusion et perspectives

Modèle en 1D

$$\begin{cases} \partial_y v = \frac{\Phi}{\zeta(h)} \\ \partial_t v + v\partial_y v + \tau(h)\partial_y \bar{p} = \tau(h)\partial_y(\mu\partial_x v) - g \\ \partial_t h + v\partial_y h = \tau(h)\Phi \end{cases}$$

$$\partial_y \tau = \tau'(h)\partial_y h = \frac{\partial_y h}{\zeta(h)} = \frac{1}{\zeta(h)}\frac{\tau(h)}{v}\Phi = \frac{\tau(h)}{v}\partial_y v$$

Solution stationnaire pour une loi d'état quelconque

1. $v/\tau(h)$ est constant (égal à D_e), donne la vitesse : $\boxed{v(y) = D_e\tau(h(y))}$
2. Enthalpie : $\boxed{h(y) = h_e + \frac{1}{D_e}\int_0^y \Phi(z)\,\mathrm{d}z}$
3. Pression dynamique $\bar{p}$: intégration de la deuxième équation

- Existence de solutions exactes avec changement de phase en 1D (méthode des caractéristiques)

Modèle en 2D

Existence (en temps court) pour le modèle LMNC

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \Phi/\zeta(h) \\ \Big(\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\Big) + \tau(h)\nabla\bar{p} = \tau(h)\,\operatorname{div}(\sigma(\boldsymbol{u})) + \boldsymbol{g} \\ \Big(\partial_t h + \boldsymbol{u}\cdot\nabla h\Big) = \tau(h)\Phi \end{cases}$$

En système fermé (glissement sur tous les bords)

- Linéarisation (itérées de Picard)
- Estimations d'énergie : itérées bornées dans des espaces fonctionnels réguliers
  - Equation de transport
  - Equation type Navier-Stokes (décomposition de Hodge)
- Contraction dans des espaces fonctionnels moins réguliers
- Grönwall $\rightsquigarrow$ convergence, existence en temps court
- Unicité

Modèle en 2D

Existence (en temps court) pour le modèle LMNC

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \Phi/\zeta(h) \\ \Big(\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}\Big) + \tau(h)\nabla \bar{p} = \tau(h) \operatorname{div}(\sigma(\boldsymbol{u})) + \boldsymbol{g} \\ \Big(\partial_t h + \boldsymbol{u} \cdot \nabla h\Big) = \tau(h)\Phi \end{cases}$$

Avec les conditions limites physiques

- Equation type Navier-Stokes :

  $\rightsquigarrow$ adaptation de la condition limite en sortie (sortie libre)

  $$\sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} - \bar{p}\boldsymbol{n} - \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})^-}{2\tau} = 0$$

  $\rightsquigarrow$ adaptation de la décomposition de Hodge aux conditions limites
- Equation de transport :

  $\rightsquigarrow$ on ne contrôle pas le signe du terme en sortie...

  $\rightsquigarrow$ utilisation de la formule explicite pour les caractéristiques :
  - compatibilité entre les domaines utilisant condition initiale/limite...
  - régularité aux interfaces entre ces domaines...

Plan de l'exposé

1. Contexte
2. Loi d'état et prise en compte du changement de phase
3. Propriétés du modèle 3-LMNC
4. Enrichissement de la modélisation diphasique
5. Propriétés du modèle 4-LMNC
6. Régime de relaxation instantanée et couplage
7. Conclusion et perspectives

Modèle 4-LMNC

Hiérarchie de modèles diphasiques

- Prise en compte de possibles déséquilibres entre les phases (pressions, températures, potentiels chimiques, vitesses)
- Ici, modèle homogène (une vitesse) avec égalité de pressions et températures
- Terme source de relaxation (sur la fraction de masse) vers une fraction d'équilibre (saturation)

Forme conservative, écriture en ρ

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_y(\varrho v) = 0 \\ \partial_t(\varrho h) + \partial_y(\varrho h v) = \Phi \\ \partial_t(\varrho\varphi) + \partial_y(\varrho\varphi v) = \varrho\mathcal{R}_\varepsilon(\varrho,\varphi) \\ \partial_t(\varrho v) + \partial_y(\varrho v^2 + \bar{p}) = 0 \end{cases}
\xrightarrow[\cancel{\bar{p}}\,(1D)]{\varrho=\frac{1}{\tau}}$$

Forme non conservative, écriture en τ

$$\begin{cases} \partial_y v = \Phi \left.\dfrac{\partial\tau}{\partial h}\right|_\varphi + \dfrac{\mathcal{R}_\varepsilon(h,\varphi)}{\tau(h,\varphi)} \left.\dfrac{\partial\tau}{\partial\varphi}\right|_h \\ \partial_t h + v\partial_y h = \Phi\tau(h,\varphi) \\ \partial_t\varphi + v\partial_y\varphi = \mathcal{R}_\varepsilon(h,\varphi) \end{cases}$$

- φ : fraction de masse
- $\mathcal{R}_\varepsilon$: terme source (interactions entre les phases)
- $\tau(h,\varphi)$ donné par la loi d'état

Modèle 4-LMNC

Hiérarchie de modèles diphasiques

- Prise en compte de possibles déséquilibres entre les phases (pressions, températures, potentiels chimiques, vitesses)
- Ici, modèle homogène (une vitesse) avec égalité de pressions et températures
- Terme source de relaxation (sur la fraction de masse) vers une fraction d'équilibre (saturation)

Forme conservative, écriture en ρ

Forme non conservative, écriture en τ

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_y(\varrho v) = 0 \\ \partial_t(\varrho h) + \partial_y(\varrho h v) = \Phi \\ \partial_t(\varrho\varphi) + \partial_y(\varrho\varphi v) = \varrho\mathcal{R}_\varepsilon(\varrho,\varphi) \\ \partial_t(\varrho v) + \partial_y(\varrho v^2 + \bar{p}) = 0 \end{cases} \xrightarrow[\cancel{\bar{p}}\,(1D)]{\varrho=\frac{1}{\tau}} \boxed{\begin{cases} \partial_y v = \Phi \left.\dfrac{\partial\tau}{\partial h}\right|_\varphi + \dfrac{\mathcal{R}_\varepsilon(h,\varphi)}{\tau(h,\varphi)} \left.\dfrac{\partial\tau}{\partial\varphi}\right|_h \\ \partial_t h + v\partial_y h = \Phi\tau(h,\varphi) \\ \partial_t\varphi + v\partial_y\varphi = \mathcal{R}_\varepsilon(h,\varphi) \end{cases}}$$

- φ : fraction de masse
- $\mathcal{R}_\varepsilon$: terme source (interactions entre les phases)
- $\tau(h,\varphi)$ donné par la loi d'état

Loi d'état

- Comme précédemment :
  - Phases pures
  - Définition des valeurs à saturation
- Définition du mélange

Mélange isobare et isotherme

$$\begin{cases} \tau \stackrel{\text{def}}{=} \varphi\tau_g(T) + (1-\varphi)\tau_\ell(T), \\ h \stackrel{\text{def}}{=} \varphi h_g(T) + (1-\varphi)h_\ell(T). \end{cases}$$

✓ $h_\kappa(T)$ et $\tau_\kappa(T)$ donnés par la loi des SG

✓ éliminer T

$$\boxed{\tau(h,\varphi) = \frac{h - q(\varphi)}{\zeta(\varphi)}}$$

avec

$$q(\varphi) = \varphi q_g(\varphi) + (1-\varphi)q_\ell(\varphi), \qquad \zeta(\varphi) = \frac{\varphi\zeta_g\tau_g^s + (1-\varphi)\zeta_\ell\tau_\ell^s}{\varphi\tau_g^s + (1-\varphi)\tau_\ell^s}$$

Terme de relaxation

- Terme source de relaxation $\mathcal{R}_\varepsilon$: échanges de masse entre les phases en un temps caractéristique ε

$$\boxed{\mathcal{R}_\varepsilon(h,\varphi) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\varphi^s(h) - \varphi\right)}$$

- $\varphi^s(h)$: fraction de masse à saturation du mélange (égalités des potentiels de Gibbs entre les phases)

$$\varphi^s(h) = \begin{cases} 0, & \text{if } h \leq h_\ell^s, \\ \dfrac{h - h_\ell^s}{h_g^s - h_\ell^s}, & \text{if } h_\ell^s < h < h_g^s, \\ 1, & \text{if } h \geq h_g^s. \end{cases}$$

- Régime de relaxation instantanée si $\varepsilon \to 0$.

Plan de l'exposé

1. Contexte
2. Loi d'état et prise en compte du changement de phase
3. Propriétés du modèle 3-LMNC
4. Enrichissement de la modélisation diphasique
5. Propriétés du modèle 4-LMNC
6. Régime de relaxation instantanée et couplage
7. Conclusion et perspectives

Propriétés du modèle en 1D

Proposition (Principe du maximum)

Si $\varphi_e, \varphi_0 \in [0,1]$, *alors* $\varphi(t,x) \in [0,1]$ *pour tout* (t,x).

Proposition (Positivité)

Si $\varphi^s(h_e) > \varphi_e$ *et* $\varphi^s(h^0) > \varphi^0$, *alors* $\varphi^s(h(t,x)) > \varphi(t,x)$ *pour tout* (t,x).

$\rightsquigarrow$ positivité du terme source $\mathcal{R}_\varepsilon$

$\rightsquigarrow$ "décalage de φ par rapport à h" : p.ex. h peut dépasser h^s_ℓ tandis que $\varphi = 0$.

- Preuve via expression "explicite" avec la méthode des caractéristiques
- Distinction des domaines (condition initiale, condition limite, changement de phase)

Solution stationnaire

- Enthalpie (identique à celle du 3-LMNC) $h(y) = h_e + \frac{1}{D_e} \int_0^y \Phi(x)\ \mathrm{d}x$
- Vitesse $v(y) = D_e \, \tau\big(h(y), \varphi(y)\big)$
- Fraction de masse φ solution de l'EDO $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{D_e} \dfrac{\mathcal{R}_\varepsilon\big(h(y), \varphi\big)}{\tau\big(h(y), \varphi\big)}$

Propriétés de la solution stationnaire

- "Pente" de l'enthalpie (Φ/D_e si Φ constant)
- Conservation de la masse (débit $v/\tau = D_e$) $\rightsquigarrow \tau \partial_y v = v \partial_y \tau$

- Eq. sur $\partial_y v \rightsquigarrow \tau \partial_y v = \tau \dfrac{\Phi}{\zeta(\varphi)} + \mathcal{R}_\varepsilon \left.\dfrac{\partial \tau}{\partial \varphi}\right|_h$
- $\tau(h, \varphi) \rightsquigarrow \partial_y \tau = \dfrac{1}{\zeta(\varphi)} \partial_y h + \left.\dfrac{\partial \tau}{\partial \varphi}\right|_h \partial_y \varphi$
- Eq. (statio.) sur h et φ : $v \partial_y h = \tau \Phi$, $v \partial_y \varphi = \mathcal{R}_\varepsilon$.

Schéma équilibre

Préservation au niveau discret de la propriété $\boxed{\tau_i(v_i - v_{i-1}) = v_i(\tau_i - \tau_{i-1})}$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + v_i^n \dfrac{h_i^n - h_{i-1}^n}{\Delta y} = \Phi_i^n \tau_i^n \\ \dfrac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{\Delta t} + v_i^n \dfrac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{\Delta y} = R_i^{n+1,n+1} \\ \dfrac{v_i^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}}{\Delta y} = \dfrac{1}{\zeta_i^{n+1}} S_i^{n+1} \end{cases}}$$

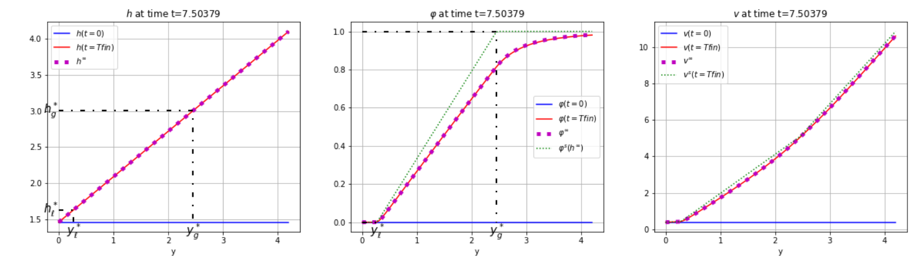
where

$$R_i^{n+1,n+1} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\varphi^s(h_i^{n+1}) - \varphi_i^{n+1}\right), \qquad \zeta_i^n = \frac{\varphi_i^n \zeta_g \tau_g^s + (1-\varphi_i^n)\zeta_\ell \tau_\ell^s}{\varphi_i^n \tau_g^s + (1-\varphi_i^n)\tau_\ell^s},$$

$$S_i^n = \Phi_i^n - \frac{R_i^{n,n}}{\tau_i^n}\left[q_g - q_\ell - \frac{\tau_{i-1}^n(\zeta_g - \zeta_\ell)\tau_g^s \tau_\ell^s}{(\varphi_i^n \tau_g^s + (1-\varphi_i^n)\tau_\ell^s)(\varphi_{i-1}^n \tau_g^s + (1-\varphi_{i-1}^n)\tau_\ell^s)}\right]$$

Résultats numériques

- Situation initiale : liquide pur
- 100 points de discrétisation, CFL=0.99
- $\varepsilon = 10^{-1}$
- Comportement “équilibre” vérifié à 10^{-15} près
  - “Pente” de l’enthalpie
  - Conservation du débit $v/\tau = D_e$
- On vérifie aussi les propriétés théoriques (principe du max., positivité de $\mathcal{R}_\varepsilon$)
  - Décalage de φ par rapport à h



Plan de l'exposé

1. Contexte
2. Loi d'état et prise en compte du changement de phase
3. Propriétés du modèle 3-LMNC
4. Enrichissement de la modélisation diphasique
5. Propriétés du modèle 4-LMNC
6. Régime de relaxation instantanée et couplage
7. Conclusion et perspectives

Convergence formelle

$$\begin{cases} \partial_y v_4 = \Phi \left.\dfrac{\partial \tau}{\partial h}\right|_{\varphi} + \dfrac{\mathcal{R}_\varepsilon(h_4,\varphi_4)}{\tau(h_4,\varphi_4)} \left.\dfrac{\partial \tau}{\partial \varphi}\right|_{h} \\ \partial_t h_4 + v_4 \partial_y h_4 = \Phi \tau(h_4,\varphi_4) \\ \partial_t \varphi_4 + v_4 \partial_y \varphi_4 = \frac{1}{\varepsilon}(\varphi^s(h_4) - \varphi_4) \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \begin{cases} \partial_y v_3 = \Phi \tau'(h_3) \\ \partial_t h_3 + v \partial_y h_3 = \Phi \tau(h_3) \end{cases}$$

Proposition (Convergence formelle)

$$(v_4, h_4, \varphi_4) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} (v_3, h_3, \varphi^s(h_3))$$

- Développement asymptotique de chaque variable en ε
- Terme source raide, ordre ε^{-1} : $\rightsquigarrow \varphi_4^0 = \varphi^s(h_4^0)$
- Ordre ε^0 : $\partial_t \varphi_4^0 + v_4^0 \partial_y \varphi_4^0 = \varphi^{s\prime}(h_4^0)(\partial_t h_4^0 + v_4 \partial_y h_4^0)$
- Lois d'état $\boxed{\tau(h, \varphi^s(h)) = \tau(h)}$ $\rightsquigarrow h_4^0 \to h_3$
- $\boxed{\left.\dfrac{\partial \tau}{\partial h}\right|_{\varphi} + \varphi^{s\prime}(h) \left.\dfrac{\partial \tau}{\partial \varphi}\right|_{h} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\tau(h,\varphi^s(h)) = \tau'(h)}$ $\rightsquigarrow v_4^0 \to v_3$

Préservation de l'asymptotique ($\varepsilon \to 0$)

Proposition (Schéma AP)

Le schéma ci-dessous est faiblement AP

$$\begin{cases} h^* = h^n + \Delta t\, \Phi\, \tau(h^n, \varphi^n) \\ \varphi^* = \varphi^n + \dfrac{\Delta t}{\varepsilon}(\varphi^s(h^*) - \varphi^*) \\ D(v^{n+1}) = \dfrac{\Phi}{\zeta(\varphi^*)} + \dfrac{1}{\tau(h^n, \varphi^n)} \dfrac{\varphi^s(h^*) - \varphi^*}{\varepsilon} A(h^n, \varphi^n, \varphi^*) \\ h^{n+1} = h^* - \Delta t\, v^{n+1} D(h^*) \\ \varphi^{n+1} = \varphi^* - \Delta t\, v^{n+1} D(\varphi^*) \end{cases}$$

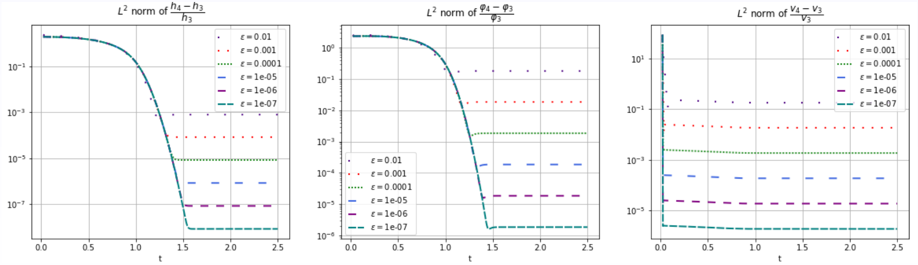
où $\partial_\varphi \tau$ est approché par

$$A(h^n, \varphi^n, \varphi^*) = -\frac{1}{\zeta(\varphi^*)\zeta(\varphi^n)} \left[(q_g - q_\ell)\zeta(\varphi^n) + (h^n - q(\varphi^n)) \frac{\zeta(\varphi^*) - \zeta(\varphi^n)}{\varphi^* - \varphi^n} \right]$$

et $D(\cdot)$ est un opérateur de discrétisation de $\partial_y \cdot$.

Résultats numériques

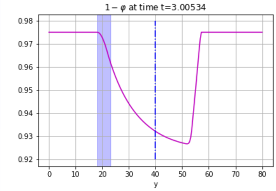
- 200 points de discrétisation, pas de temps fixé indépendant de ε
- Variations de ε de 10^{-2} à 10^{-7}
- Conditions de bord identiques pour les deux modèles : $h_e = 1.01 h_\ell^s$
- Conditions initiales différentes entre les deux modèles et mal préparées
  - $h_4^0 \neq h_3^0 = h_e$
  - $\varphi_4^0 \neq \varphi^s(h_4^0)$
- Comportement préservant l'asymptotique "relaxé"



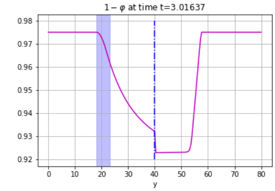
Couplage spatial

- 200 points de discrétisation, pas de temps fixé indépendant de ε
- Chauffage (Φ) localisé dans une partie du circuit primaire
- $\varphi_e = 0.025$, temps final $3\,$s
- Interface (fictive) au milieu du domaine

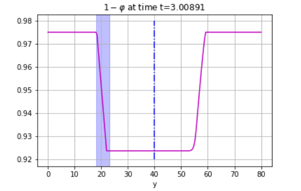
$$\varepsilon(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y < 40\,\text{m}, \\ 10^{-10} & \text{if } y > 40\,\text{m}. \end{cases}$$



(a) $1 - \varphi$ for $\varepsilon = 1$



(b) $1 - \varphi$ for $\varepsilon(y)$



(c) $1 - \varphi$ for $\varepsilon = 10^{-10}$

cf. [Ambroso, Hérard & Hurisse, '09]

Plan de l'exposé

1. Contexte
2. Loi d'état et prise en compte du changement de phase
3. Propriétés du modèle 3-LMNC
4. Enrichissement de la modélisation diphasique
5. Propriétés du modèle 4-LMNC
6. Régime de relaxation instantanée et couplage
7. Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Conclusion

- Modèles à faible nombre de Mach prenant en compte les transferts de chaleur, avec ou sans retard sur les échanges de masse
- Solutions stationnaires, schéma équilibre
- Convergence formelle entre les modèles, schéma AP

Travaux en cours et perspectives

- Analyse des modèles : régularité de l'équation de transport, puis existence en temps long
- Développement d'une hiérarchie de modèles (relaxation des différents équilibres), convergences des modèles
- Couplage avec des équations simplifiées de neutronique pour déterminer Φ
- Enrichissement de la modélisation thermodynamique

Merci de votre attention!