

Coalitions efficaces dans les jeux booléens

Efficient coalitions in Boolean games

Elise Bonzon

Marie-Christine Lagasque-Schiex

Jérôme Lang

IRIT-UPS

118 route de Narbonne

31062 Toulouse Cedex, FRANCE

{bonzon,lagasq,lang}@irit.fr

Résumé

Les jeux booléens permettent de représenter succinctement des jeux en tirant profit du pouvoir d'expression et de la concision de la logique propositionnelle. Un jeu booléen est constitué d'un ensemble de joueurs, chacun d'entre eux contrôlant un ensemble de variables propositionnelles et ayant un but représenté par une formule en logique propositionnelle. Nous montrons ici que les jeux booléens sont un cadre très simple, et pourtant assez sophistiqué, pour étudier les coalitions. Étant donné que les joueurs ont des préférences dichotomiques, la notion suivante émerge naturellement : une coalition dans un jeu booléen est efficace si elle peut garantir à tous ses membres que leurs buts sont satisfaits. Nous étudions ici les propriétés de ces coalitions.

Mots Clef

Théorie des jeux, logique, coalitions, noyau

Abstract

Boolean games are a logical setting for representing strategic games in a succinct way, taking advantage of the expressive power and conciseness of propositional logic. A Boolean game consists of a set of players, each of which controls a set of propositional variables and has a specific goal expressed by a propositional formula. We show here that Boolean games are a very simple setting, yet sophisticated enough, for studying coalitions. Due to the fact that players have dichotomous preferences, the following notion emerges naturally : a coalition in a Boolean game is efficient if it has the power to guarantee that all goals of the members of the coalition are satisfied. We study the properties of efficient coalitions.

Keywords

Game theory, logic, coalitions, core

1 Introduction

Les jeux booléens [9, 8, 7, 6] permettent de représenter les jeux stratégiques d'une manière succincte en tirant profit du pouvoir d'expression et de la concision de la logique propositionnelle. Informellement, un jeu booléen est composé d'un ensemble des joueurs, chacun d'entre eux contrôlant un ensemble de variables propositionnelles et ayant un but représenté par une formule en logique propositionnelle¹. Ainsi, un joueur dans un jeu booléen a des préférences dichotomiques : son but est satisfait ou ne l'est pas. Cette restriction peut sembler à première vue peu raisonnable. Cependant, beaucoup de situations concrètes peuvent être modélisées comme des jeux dont les agents ont des préférences dichotomiques (nous en donnons un exemple dans ce papier). Étant donné que les préférences des joueurs sont dichotomiques, la simple notion suivante (et pourtant assez sophistiquée) émerge naturellement : une coalition dans un jeu booléen est efficace si elle peut garantir à tous ses membres que leurs buts sont satisfaits. Notre objectif dans la suite est de définir et de caractériser les coalitions efficaces, et de voir comment elles sont liées au concept bien connu de noyau dans un jeu coalitionnel.

Après avoir donné en section 2 quelques rappels sur les jeux booléens, nous étudierons en section 3 les propriétés des fonctions d'effectivité associées aux jeux booléens. Dans la section 4, nous étudierons en détail la notion de coalition efficace : nous donnerons une caractérisation exacte des ensembles de coalitions correspondant à des ensembles de coalitions efficaces associées à un jeu booléen, et nous ferons le lien entre coalition efficace et noyau. L'état de l'art et les perspectives seront abordées en section 5, tandis que les preuves seront données en Annexe.

2 Jeu booléen à n -joueurs

Soit $V = \{a, b, \dots\}$ un ensemble fini de variables propositionnelles et L_V le langage propositionnel construit à partir de V , des connecteurs habituels et des constantes boo-

¹Nous nous référons ici à la version des jeux booléens définie dans [6] généralisant la proposition initiale [9].

léennes \top (vrai) et \perp (faux). Les formules de L_V seront notées φ, ψ etc. Un littéral est soit une variable de V , soit sa négation. Une conjonction finie de littéraux est appelée *terme*. Une disjonction finie de littéraux est appelée *clause*. On note $Lit(\alpha)$ l'ensemble des littéraux formant le terme α . 2^V est l'ensemble des interprétations pour V avec la convention suivante : soit M une interprétation pour V et pour tout $x \in V$, M donne la valeur *vrai* à x si $x \in M$, et *faux* sinon. Soit M une interprétation pour V et $\psi \in L_V$, la conséquence logique $M \models \psi$ est définie de la manière usuelle. Soit $X \subseteq V$. 2^X est l'ensemble des X -interprétations. Une *interprétation partielle* de L_V est une X -interprétation pour $X \subseteq V$. Les interprétations partielles sont représentées par une liste de variables de X , le symbole $-$ représentant la négation d'une variable. Par exemple, si $X = \{a, b, d\}$, la X -interprétation $M = \{a, d\}$ sera notée $a\bar{b}d$. Si $Var(\varphi) \subseteq X$, alors $Mod_X(\varphi)$ représente l'ensemble des X -interprétations satisfaisant φ .

Si $\{V_1, \dots, V_p\}$ est une partition de V et si $\{M_1, \dots, M_p\}$ sont des interprétations partielles, avec $M_i \in 2^{V_i}$, (M_1, \dots, M_p) représente alors l'interprétation $M_1 \cup \dots \cup M_p$.

Etant donné un ensemble de variables propositionnelles V , un jeu booléen sur V est un jeu à n joueurs² pour lequel les actions disponibles de chaque joueur consistent à assigner une valeur de vérité à toutes les variables d'un sous-ensemble donné de V . Les préférences de chaque joueur i sont représentées par une formule propositionnelle φ_i formée sur les variables de V .

Définition 1 *Un jeu booléen à n joueurs est un 5-uplet $(N, V, \pi, \Gamma, \Phi)$, avec*

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des joueurs (appelés aussi *agents*);
- V un ensemble de variables propositionnelles;
- $\pi : N \mapsto V$ une fonction d'assignement de contrôle;
- $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ l'ensemble des contraintes, chaque γ_i étant une formule propositionnelle de $L_{\pi(i)}$ satisfiable;
- $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ l'ensemble des buts, chaque φ_i étant une formule de L_V satisfiable.

Un 4-uplet (N, V, π, Γ) , avec N, V, π, Γ définis comme ci-dessus est appelé un **pré-jeu booléen**.

La fonction d'assignement de contrôle π associe à chaque joueur les variables qu'il contrôle. On note π_i l'ensemble des variables contrôlées par le joueur i . Chaque variable est contrôlée par un et un seul joueur. Ainsi, $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ forme une partition de V .

Définition 2 *Soit $G = (N, V, \pi, \Gamma, \Phi)$ un jeu booléen. Une **stratégie**³ pour un joueur i de G est une π_i -interprétation satisfaisant γ_i . L'ensemble des stratégies de i est dénoté par $S_i = \{s_i \in 2^{\pi_i} \mid s_i \models \gamma_i\}$. Un **profil de stratégies** s pour*

²Dans la proposition originale [9], les jeux booléens sont des jeux à deux joueurs et à somme nulle. Cependant, ce modèle peut facilement être généralisé à des jeux à n joueurs et à somme non nécessairement nulle [6].

³Dans ce papier, nous ne considérons que des stratégies pures.

G est un n -uplet $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ avec pour tout i , $s_i \in S_i$. $S = S_1 \times \dots \times S_n$ est l'ensemble de tous les profils de stratégies.

Pour chaque joueur i , γ_i est l'ensemble des contraintes restreignant l'ensemble des profils de stratégies possibles pour ce joueur.

Puisque $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ forme une partition de V , un profil de stratégies s est une interprétation pour V , i.e., $s \in 2^V$. Les notations suivantes sont usuelles en théorie des jeux. Soit $s = (s_1, \dots, s_n)$ un profil de stratégies. Pour tout ensemble non vide de joueurs $I \subseteq N$, la projection de s sur I est définie par $s_I = (s_i)_{i \in I}$ et $s_{-I} = s_{N \setminus I}$. Si $I = \{i\}$, la projection de s sur $\{i\}$ est dénotée par s_i au lieu de $s_{\{i\}}$; similairement, on note s_{-i} au lieu de $s_{-\{i\}}$. π_I représente l'ensemble des variables contrôlées par I , et $\pi_{-I} = \pi_{N \setminus I}$. L'ensemble des stratégies de $I \subseteq N$ est dénoté par $S_I = \times_{i \in I} S_i$, et l'ensemble des buts de $I \subseteq N$ par $\Phi_I = \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$.

Si s et s' sont deux profils de stratégies, (s_{-I}, s'_I) représente le profil de stratégies obtenu en remplaçant s_i par s'_i dans s pour tout $i \in I$.

Le but φ_i du joueur i est une relation de préférence dichotomique et compacte, correspondant donc à une fonction d'utilité binaire : $u_i : S \rightarrow \{0, 1\}$, définie par $u_i(s) = 0$ si $s \models \neg \varphi_i$ et $u_i(s) = 1$ si $s \models \varphi_i$. s est au moins aussi bon que s' pour i , dénoté par $s \succeq_i s'$, si $u_i(s) \geq u_i(s')$, ou de façon équivalente si $s \models \neg \varphi_i$ implique $s' \models \neg \varphi_i$; s est strictement meilleur que s' pour i , dénoté par $s \succ_i s'$, si $u_i(s) > u_i(s')$, ou, de façon équivalente, $s \models \varphi_i$ et $s' \models \neg \varphi_i$.

On peut noter que le fait de choisir des utilités binaires entraîne clairement une perte de généralité. Pourtant, il existe des problèmes intéressants, comme celui présenté dans l'exemple 2, qui ont des préférences naturellement dichotomiques, et les jeux booléens permettent alors de représenter ces problèmes de façon compacte. De plus, il est possible d'étendre assez facilement les jeux booléens avec des préférences non-dichotomiques, celles-ci pouvant être représentées dans un langage de représentation compacte de préférences (voir [5]).

3 Coalitions et fonctions d'effectivité dans les jeux booléens

Dans cette section nous allons étudier les jeux booléens du point de vue des fonctions d'effectivité, développées en choix social afin de modéliser le pouvoir des coalitions [10, 1, 13]. On rappelle qu'une **coalition** C est un sous-ensemble quelconque de N . N est appelée la **grande coalition**.

Commençons par rappeler ici ce qu'est une fonction d'effectivité :

Définition 3 *Une fonction d'effectivité coalitionnelle est une fonction $\text{Eff} : 2^N \rightarrow 2^{2^S}$ monotone : pour toute coalition $C \subseteq N$, $X \in \text{Eff}(C)$ implique $Y \in \text{Eff}(C)$ quand $X \subseteq Y \subseteq S$.*

La fonction Eff associe à chaque groupe de joueurs l'en-

semble des issues⁴ du jeu que ce groupe a le pouvoir d'atteindre. On interprète habituellement $X \in \text{Eff}(C)$ comme "les joueurs dans C ont une stratégie commune leur permettant d'obtenir une issue dans X ".

On dit qu'une coalition $C \subseteq N$ est α -effective pour $X \subseteq S$ si et seulement si les joueurs de cette coalition ont une stratégie commune leur permettant d'obtenir une issue dans X , quelles que soient les stratégies des autres joueurs.

Nous voulons à présent définir les fonctions d'effectivité correspondant au cas particulier des jeux booléens. Une des particularités des jeux booléens est la définition des stratégies individuelles comme étant l'attribution de valeurs de vérité sur un ensemble donné de variables propositionnelles. On peut se demander à quel point cette spécificité est restrictive. Clairement, la définition de S_i comme étant $\text{Mod}_{\pi_i}(\gamma_i)$ entraîne quelques contraintes sur le pouvoir des joueurs. Notre but est de donner une caractérisation exacte des fonctions d'effectivité induites par les jeux booléens. Puisque dans un jeu booléen le pouvoir d'un agent i est indépendant de son but ϕ_i , il suffira de considérer les pré-jeux booléens pour étudier les fonctions d'effectivité.

A partir d'un pré-jeu booléen G , on obtient une fonction d' α -effectivité Eff_G , qui caractérise les coalitions composées de joueurs indépendants des joueurs n'appartenant pas à cette coalition pour obtenir une issue X quelconque.

Définition 4 Soit $G = (N, V, \pi, \Gamma)$ un pré-jeu booléen. L' α -effectivité fonction coalitionnelle induite par G est la fonction $\text{Eff}_G : 2^N \rightarrow 2^{2^S}$ définie par : pour tout $X \subseteq S$ et tout $C \subseteq N$, $X \in \text{Eff}_G(C)$ s'il existe $s_C \in S_C$ tel que pour tout $s_{-C} \in S_{-C}$, $(s_C, s_{-C}) \in X$.⁵

Cette définition est un cas particulier de la fonction d' α -effectivité induite par un jeu stratégique (voir [13], Chapitre 2), puisqu'un pré-jeu booléen est une forme stratégique spécifique. Par conséquent, cette fonction satisfait les propriétés suivantes (cf. [13], Théorème 2.27) :

- (i) $\forall C \subseteq N$, $\emptyset \notin \text{Eff}(C)$;
- (ii) $\forall C \subseteq N$, $S \in \text{Eff}(C)$;
- (iii) pour tout $X \subseteq S$, si $\bar{X} \notin \text{Eff}(\emptyset)$ alors $X \in \text{Eff}(N)$;
- (iv) Eff est superadditive : si pour tout $C, C' \subseteq N$ et $X, Y \subseteq S$, si $X \in \text{Eff}(C)$ et $Y \in \text{Eff}(C')$ alors $W \cap Y \in \text{Eff}(C \cup C')$.

Une fonction d' α -effectivité qui satisfait ces quatre propriétés est appelée **fortement jouable**. On peut noter que la propriété fortement jouable implique les propriétés de régularité⁶ et de coalition-monotonie⁷ ([13], Lemme 2.26).

⁴Dans un jeu booléen, une issue du jeu correspond à un profil de stratégies. Mais, dans un cadre plus général, une issue du jeu peut correspondre à un plan d'actions, ou à l'utilité obtenue par chaque joueur.

⁵On peut remarquer que les fonctions d'effectivité induites par des pré-jeux booléens peuvent être exprimées de façon équivalente par des fonctions $\text{Eff} : 2^N \rightarrow 2^{2^V}$ partant des coalitions et allant aux ensembles de formules logiques : $\phi \in \text{Eff}(I)$ si $\text{Mod}_{\pi_i}(\phi) \in \text{Eff}(I)$. Cette définition entraîne évidemment une indépendance de syntaxe, c'est-à-dire si $\phi \equiv \psi$ alors $\phi \in \text{Eff}(I)$ si et seulement si $\psi \in \text{Eff}(I)$.

⁶ Eff est C -régulière si pour tout X , si $X \in \text{Eff}(C)$, alors $\bar{X} \notin \text{Eff}(\bar{C})$; Eff est régulière si elle est C -régulière pour tout C .

⁷ Eff est coalition-monotone si pour tout $C \subseteq C' \subseteq N$ alors $\text{Eff}(C) \subseteq \text{Eff}(C')$.

Pourtant, nous aimerions avoir une caractérisation encore plus précise de ces fonctions d' α -effectivité correspondant à un pré-jeu booléen. Pour cela, nous devons tout d'abord définir deux propriétés de plus, en utilisant la notation suivante : $At(C)$ dénotera les ensembles minimaux de $\text{Eff}(C)$, c'est-à-dire que $At(C) = \{X \in \text{Eff}(C) \mid \text{il n'existe pas de } Y \in \text{Eff}(C) \text{ tel que } Y \subseteq X\}$.

Atomicité : Eff satisfait l'*atomicité* si pour tout $C \subseteq N$, $At(C)$ forme une partition de S .

Décomposabilité : Eff satisfait la *décomposabilité* si pour tout $I, J \subseteq N$ et pour tout $X \subseteq S$, $X \in \text{Eff}(I \cup J)$ si et seulement s'il existe $Y \in \text{Eff}(I)$ et $Z \in \text{Eff}(J)$ tels que $X = Y \cap Z$.

On peut noter que la décomposabilité est une propriété forte qui entraîne la superadditivité.

Propriété 1 Une fonction d' α -effectivité coalitionnelle Eff satisfait (1) fortement jouable, (2) atomicité, (3) décomposabilité et (4) $\text{Eff}(N) = 2^S \setminus \emptyset$ si et seulement s'il existe un pré-jeu booléen $G = (N, V, \pi, \Gamma)$ et une fonction injective $\mu : S \rightarrow 2^V$ tels que pour tout $C \subseteq N : \text{Eff}_G(C) = \{\mu(X) \mid X \in \text{Eff}(C)\}$.

4 Coalitions efficaces

On considère à présent les jeux booléens complets, et on va définir les *coalitions efficaces*. Informellement, une coalition est efficace dans un jeu booléen si et seulement si tous les joueurs de cette coalition ont la possibilité ensemble de satisfaire tous leurs buts :

Définition 5 Soit $G = (N, V, \pi, \Gamma, \Phi)$ un jeu booléen. Une coalition $C \subseteq N$ est **efficace** si et seulement si $\exists s_C \in S_C$ tel que $\forall s_{-C}$, $s_C \models \bigwedge_{i \in C} \phi_i$. On dénote par $\text{EC}(G)$ l'ensemble de toutes les coalitions efficaces d'un jeu G .

Exemple 1 Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$, avec $V = \{a, b, c\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, $\gamma_i = \top$ pour tout i , $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$, $\phi_1 = (\neg a \wedge b)$, $\phi_2 = (\neg a \vee \neg c)$ et $\phi_3 = (\neg b \wedge \neg c)$. Remarquons tout d'abord que $\phi_1 \wedge \phi_3$ est inconsistant. Aucune coalition contenant $\{1, 3\}$ ne peut donc être efficace. $\{1\}$ n'est pas efficace car ϕ_1 ne peut pas être satisfaite en fixant uniquement la valeur de a . Similairement, $\{2\}$ et $\{3\}$ ne sont pas efficaces non plus. $\{1, 2\}$ est efficace : les joueurs 1 et 2 ont une stratégie commune leur permettant de satisfaire leurs buts : $s_{\{1,2\}} = \bar{a}b \models \phi_1 \wedge \phi_2$. $\{2, 3\}$ est efficace car $s_{\{2,3\}} = \bar{b}\bar{c} \models \phi_2 \wedge \phi_3$. Evidemment \emptyset est efficace⁸, car $\phi_\emptyset = \bigwedge_{i \in \emptyset} \phi_i \equiv \top$ est toujours satisfait. On a donc $\text{EC}(G) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

On peut déjà voir à partir de cet exemple simple que EC n'est fermé "ni par le bas, ni par le haut" : en effet, si C

⁸On peut penser que dire que la coalition vide est efficace n'a pas grand sens. Quoi qu'il en soit, il serait possible de changer la définition d'une coalition efficace en excluant \emptyset sans qu'il soit nécessaire de changer les autres notions et résultats.

est efficace, un sous-ensemble ou sur-ensemble de C peut ne pas être efficace. On peut également voir que EC n'est fermé ni par intersection, ni par union : $\{1, 2\}$ et $\{2, 3\}$ sont efficaces, mais ni $\{1, 2\} \cap \{2, 3\}$, ni $\{1, 2\} \cup \{2, 3\}$ ne le sont.

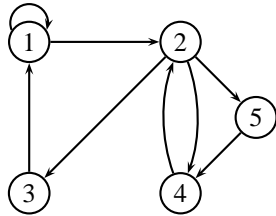
Exemple 2 (Echange de rein, d'après [2]) Soit n couples d'individus, chacun d'entre eux étant constitué d'un receveur R_i , en attente d'un nouveau rein, et d'un donneur D_i , qui est prêt à donner un de ses reins pour sauver R_i . Comme le rein du donneur D_i n'est pas nécessairement compatible avec celui de R_i , une stratégie pour sauver le plus de gens possible consiste à considérer le graphe $\langle \{1, \dots, n\}, E \rangle$ qui contient un nœud $i \in 1, \dots, n$ pour chaque couple (D_i, R_i) , et un arc (i, j) si le rein de D_i est compatible R_j . Une solution de ce problème consiste à identifier dans le graphe des cycles disjoints : D_i accepte de donner son rein si et seulement si R_i en reçoit un. Une solution optimale (qui sauve le plus de gens possible) de ce problème serait d'obtenir une couverture optimale du graphe par des cycles disjoints. Ce problème peut être vu comme le jeu booléen G suivant :

- $N = \{1, \dots, n\}$;
- $V = \{g_{ij} | i, j \in \{1, \dots, n\}\}$; si g_{ij} est mis à vrai, alors D_i donne un de ses reins à R_j .
- $\pi_i = \{g_{ij} ; 1 \leq j \leq n\}$;
- pour tout i , $\gamma_i = \bigwedge_{j \neq k} \neg(g_{ij} \wedge g_{ik})$ exprime le fait qu'un donneur peut donner au plus un rein.
- pour tout i , $\phi_i = \bigvee_{(j,i) \in E} g_{ji}$ exprime le fait que le but de i est de recevoir un rein compatible avec R_i .

Par exemple, soit $n = 5$ et $E = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (4, 2), (5, 4)\}$. Alors, on a : $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$, avec

- $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $V = \{g_{ij} | 1 \leq i, j \leq 5\}$;
- $\forall i, \gamma_i = \bigwedge_{j \neq k} \neg(g_{ij} \wedge g_{ik})$
- $\pi_1 = \{g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15}\}$, et de même pour π_2 , etc.
- $\Phi_1 = g_{11} \vee g_{31}$; $\Phi_2 = g_{12} \vee g_{42}$; $\Phi_3 = g_{23}$; $\Phi_4 = g_{24} \vee g_{54}$; $\Phi_5 = g_{25}$.

Le graphe correspondant est le suivant :



On voit clairement que les coalitions efficaces correspondent aux solutions de ce problème. Dans notre exemple, les coalitions efficaces sont \emptyset , $\{1\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 4, 5\}$ et $\{1, 2, 4, 5\}$.

Une caractérisation possible des coalitions efficaces dans un jeu booléen est la suivante :

Propriété 2 Soit $N = \{1, \dots, n\}$ un ensemble d'agents, et $SC \in 2^{2^N}$ un ensemble de coalitions. Il existe un jeu booléen G sur N tel que l'ensemble des coalitions efficaces de G est SC (i.e. $EC(G) = SC$) si et seulement si SC satisfait ces deux propriétés :

- (1) $\emptyset \in SC$.
- (2) pour tout $I, J \in SC$ tel que $I \cap J = \emptyset$ alors $I \cup J \in SC$.

Ainsi un ensemble de coalitions correspond à l'ensemble des coalitions efficaces d'un jeu booléen si et seulement si (a) il contient l'ensemble vide et (b) il est fermé par union pour les coalitions disjointes.

La notion de coalition efficace est la même que celle de coalition fructueuse (successful coalition) dans un jeu coalitionnel qualitatif (QCG) introduite dans [15].

Nous allons à présent faire le lien entre la notion de coalition efficace et celle, bien connue, de noyau (ou cœur) dans un jeu coalitionnel. Dans des jeux coalitionnels avec des préférences ordinales, le noyau est habituellement défini comme suit (voir par exemple [4, 12, 11]) : un profil de stratégies s est dans le noyau d'un jeu coalitionnel si et seulement s'il n'existe pas de coalition C telle que tous les membres de cette coalition ont une stratégie commune s_C qui leur permet à tous d'obtenir une meilleure utilité qu'avec s . Ici, nous considérerons également une notion de noyau plus forte que cette dernière : un profil de stratégies s est dans le noyau fort d'un jeu coalitionnel si et seulement s'il n'existe pas de coalition C telle que tous les membres de cette coalition ont une stratégie commune s_C qui leur permet à tous d'obtenir une utilité au moins aussi bonne que celle obtenue avec s , et une meilleure utilité pour au moins un des membres de C .

Définition 6 Soit G un jeu booléen.

Le **noyau (faible)** de G , noté par $Noyau(G)$, est l'ensemble des profils de stratégies $s = (s_1, \dots, s_n)$ tels qu'il n'existe pas de $C \subset N$ et pas de $s_C \in S_C$ tels que pour tout $i \in C$ et tout $s_{-C} \in S_{-C}$, $(s_C, s_{-C}) \succ_i s$.

Le **noyau fort** de G , noté par $FNoyau(G)$, est l'ensemble des profils de stratégies $s = (s_1, \dots, s_n)$ tels qu'il n'existe pas de $C \subset N$ et pas de $s_C \in S_C$ tels que pour tout $i \in C$ et tout $s_{-C} \in S_{-C}$, $(s_C, s_{-C}) \succeq_i s$, et qu'il existe un $i \in C$ tels que pour tout $s_{-C} \in S_{-C}$, $(s_C, s_{-C}) \succ_i s$.

Ce concept de noyau faible est équivalent à la notion d'**équilibre de Nash fort** introduit par [3]⁹ : dans un équilibre de Nash fort, les coalitions se forment afin de mettre en corrélation les stratégies de leurs membres. Cette notion implique, au moins implicitement, l'hypothèse que la coopération nécessite nécessairement que les joueurs soient capables de signer des "accords d'engagement" : les joueurs doivent suivre les stratégies sur lesquelles ils se sont engagés, même si certains d'entre eux tireraient profit

⁹Il est facile de montrer cette équivalence : c'est juste une ré-écriture de la définition donnée dans [3].

à dévier de cette stratégie. Si les joueurs d'une coalition C s'entendent sur une stratégie s_C , au moins un de ces joueurs est satisfait par cette stratégie : $\exists i \in C$ tel que $s \models \varphi_i$.

La relation entre le noyau (faible), un jeu booléen et son ensemble de coalitions efficaces est donné par le simple résultat suivant.

Propriété 3 Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$ un jeu booléen. $s \in \text{Noyau}(G)$ si et seulement si s satisfait au moins un membre de chaque coalition efficace, c'est-à-dire, pour tout $C \in \text{EC}(G)$, $s \models \bigvee_{i \in C} \varphi_i$.

En particulier, quand aucune coalition d'un jeu booléen G n'est efficace, alors tous les profils de stratégies sont dans $\text{Noyau}(G)$. De plus, le noyau faible d'un jeu booléen ne peut pas être vide.

Propriété 4 Pour tout jeu booléen G , $\text{Noyau}(G) \neq \emptyset$.

Le noyau fort d'un jeu booléen est plus difficile à caractériser en termes de coalitions efficaces. Nous avons seulement l'implication suivante :

Propriété 5 Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$ un jeu booléen, et s un profil de stratégies. Si $s \in \text{FNoyau}(G)$, alors pour tout $C \in \text{EC}(G)$ et tout $i \in C$, $s \models \varphi_i$.

Donc, une stratégie présente dans le noyau fort d'un jeu G satisfait les buts de tous les membres de toutes les coalitions efficaces. L'exemple suivant montre que la réciproque est fautive.

Exemple 3 Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$ un jeu booléen. Nous avons : $V = \{a, b, c, d, e, f\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\gamma_i = \top$ pour tout i , $\pi_1 = \{a\}$, $\pi_2 = \{b\}$, $\pi_3 = \{c\}$, $\pi_4 = \{d\}$, $\pi_5 = \{e\}$, $\pi_6 = \{f\}$, $\varphi_1 = b \vee d$, $\varphi_2 = a \vee c$, $\varphi_3 = \neg b \vee d$, $\varphi_4 = e$, $\varphi_5 = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$ et $\varphi_6 = \neg a \wedge \neg c \wedge \neg d$. Ce jeu a deux coalitions efficaces : $\{1, 2\}$ et $\{2, 3\}$. Soit $s = abcd\bar{e}f$. Nous avons $s \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \neg \varphi_4 \wedge \neg \varphi_5 \wedge \neg \varphi_6$. Donc, $\forall C \in \text{EC}(G)$, $\forall i \in C$, $s \models \varphi_i$. Pourtant, $s \notin \text{FNoyau}(G)$: $\exists C' = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset N$ tel que $\exists s_C = abcde \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \neg \varphi_5$. Donc, $\forall s_{-C}$, $(s_C, s_{-C}) \succeq_1 s$, $(s_C, s_{-C}) \succeq_2 s$, $(s_C, s_{-C}) \succeq_3 s$, $(s_C, s_{-C}) \succeq_5 s$, et $(s_C, s_{-C}) \succ_4 s$. $s \notin \text{FNoyau}(G)$.

Il est possible de remarquer que le noyau fort d'un jeu booléen peut être vide : dans l'exemple 1, l'ensemble des coalitions efficaces est $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. Il n'y a donc pas de $s \in S$ tel que pour tout $C \in \text{EC}(G)$, pour tout $i \in C$, $s \models \varphi_i$, et donc $\text{FNoyau}(G) = \emptyset$. Pourtant, nous pouvons montrer que la condition sous laquelle le noyau fort d'un jeu booléen est non vide est équivalente à la suivante sur les coalitions efficaces.

Propriété 6 Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$ un jeu booléen. $\text{FNoyau}(G) \neq \emptyset$ si et seulement si $\bigcup \{C \subseteq N \mid C \in \text{EC}(G)\} \in \text{EC}(G)$, c'est-à-dire si et seulement si l'union de toutes les coalitions efficaces est efficace.

5 Conclusion

Nous avons prouvé que les jeux booléens peuvent être employés pour représenter compactement des jeux coalitionnels pour lesquels les joueurs ont des préférences dichotomiques. Cette spécificité nous a mené à définir la notion intéressante des coalitions efficaces. Nous avons donné une caractérisation exacte des ensembles de coalitions qui correspondent à l'ensemble de coalitions efficaces pour un jeu booléen, et nous avons donné plusieurs résultats sur le calcul de ces coalitions efficaces.

Notons que certaines de nos notions et de nos résultats ne s'appuient pas explicitement sur l'utilisation de la logique propositionnelle. Par exemple, les coalitions efficaces peuvent être définies dans un cadre plus général dans lequel les buts sont simplement exprimés en tant qu'ensembles non vides d'états. Cependant, beaucoup de notions (en particulier, la fonction π d'assignement de contrôle) deviennent beaucoup moins claires lorsqu'on ne prend pas en compte la représentation propositionnelle.

Une limitation de nos résultats est qu'ils s'appliquent uniquement à des préférences dichotomiques. Cependant, comme nous l'avons illustré sur l'exemple 2, il existe des problèmes qui s'expriment avec des buts dichotomiques. D'ailleurs, il est toujours intéressant de commencer à étudier des cas simples, particulièrement lorsqu'ils soulèvent des notions complexes¹⁰.

Comme les jeux booléens, les jeux qualitatifs coalitionnels (QCG), introduits dans [15], sont des jeux dans lesquels les agents n'assignent pas des valeurs d'utilité à chaque issue du jeu, mais sont satisfaits si leurs buts sont atteints. Une première différence entre QCG et jeux booléens est qu'il n'y a aucune fonction d'assignement de contrôle dans les QCG. Une seconde est que chaque agent dans un QCG peut avoir un ensemble de buts, et être satisfait si au moins un de ses buts est satisfait, tandis que dans un jeu booléen chaque agent n'a qu'un seul but. Pourtant, la fonction caractéristique des QCGs, qui associe à chaque coalition C les ensembles de buts que les membres de C peuvent atteindre, correspond à l'ensemble suivant dans les jeux booléens : $W(C) = \{X \subseteq \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \text{ tel que } \exists s_C \in S_C : s_C \models \varphi_i\}$ ¹¹. La logique des coalitions [13] permet d'exprimer pour toute coalition C et toute formule φ , la capacité de C de s'assurer que φ est vraie (ce qui est noté $[C]\varphi$). Dans les jeux booléens, le pouvoir des agents, exprimé par la fonction d'assignement de contrôle π , est encore dans le métalanguage. Exprimer π avec la logique des coalitions pourrait pourtant être possible, en utilisant probablement des idées provenant de [14]. La prochaine étape consisterait alors à introduire des buts dans la logique des coalitions. C'est quelque chose que nous aimerions faire prochainement.

¹⁰Les jeux booléens peuvent être facilement étendus avec des langages propositionnels de représentation compacte de préférences nondichotomiques [5].

¹¹Par exemple, nous avons pour l'exemple 1 : $W(\{1\}) = W(\{3\}) = W(\{1, 3\}) = \{\varphi_2\}$, $W(\{2\}) = \emptyset$, $W(\{1, 2\}) = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, $W(\{2, 3\}) = \{\varphi_2, \varphi_3\}$, $W(\{1, 2, 3\}) = \{\{\varphi_1, \varphi_2\}, \{\varphi_2, \varphi_3\}\}$.

Annexe

Propriété 1 Une fonction d'effectivité coalitionnelle Eff satisfait (1) fortement jouable, (2) atomicité, (3) décomposabilité et (4) $\text{Eff}(N) = 2^S \setminus \emptyset$ si et seulement si il existe un pré-jeu booléen $G = (N, V, \pi, \Gamma)$ et une fonction injective $\mu : S \rightarrow 2^V$ tels que pour tout $C \subseteq N : \text{Eff}_G(C) = \{\mu(X) \mid X \in \text{Eff}(C)\}$.

La preuve de cette propriété est assez longue. Elle repose sur les lemmes 1 à 5.

Si G est un pré-jeu booléen, l'ensemble des ensembles minimaux (appelés atomes) pour la fonction d'effectivité Eff $_G$ sera noté par At_G .

Commençons par montrer la direction (\Leftarrow).

Lemme 1 Pour tout pré-jeu booléen G , Eff $_G$ satisfait fortement jouable, atomicité, décomposabilité et $\text{Eff}_G(N) = 2^S \setminus \emptyset$.

Preuve : Eff $_G$ est une fonction (spécifique) d' α -effectivité. Le Théorème 2.27 dans [13] prouve donc que Eff $_G$ satisfait fortement jouable (et, a fortiori, la superadditivité).

Pour l'atomicité, remarquons tout d'abord que $X \in At_G(C)$ si et seulement si X est l'ensemble de toutes les π_C -interprétations satisfaisant $\gamma_C = \bigwedge_i \gamma_i$, ce qui implique clairement que tous les ensembles distincts de $At_G(C)$ sont disjoints. Remarquons ensuite que $\bigcup_{s_C \in S_C} \{s \mid s \supseteq s_C\} = S$. Donc, $At_G(C)$ forme une partition de S .

Pour la décomposabilité, de gauche à droite : Soit $X \in \text{Eff}_G(I \cup J)$. Alors il existe une stratégie commune s_{IJ} telle que si $W = \{s \in S \mid s \supseteq s_{IJ}\}$, alors $W \subseteq X$. Considérons à présent $Y = \{s \in S \mid s \supseteq s_I\}$ et $Z = \{s \in S \mid s \supseteq s_J\}$. Nous avons $Y \in \text{Eff}_G(I)$, $Z \in \text{Eff}_G(J)$ et $X = Y \cap Z$. De droite à gauche : soit $Y \in \text{Eff}_G(I)$ et $Z \in \text{Eff}_G(J)$, alors grâce à la superadditivité, $Y \cap Z \in \text{Eff}_G(I \cup J)$.

Enfin, on peut facilement vérifier que $\text{Eff}_G(N) = 2^S \setminus \emptyset$. ■

Lemme 2 S'il existe un pré-jeu booléen $G = (N, V, \pi, \Gamma)$ et une fonction injective $\mu : S \rightarrow 2^V$ telle que pour tout $C \subseteq N : \text{Eff}_G(C) = \{\mu(X) \mid X \in \text{Eff}(C)\}$, alors Eff satisfait fortement jouable, atomicité, décomposabilité et $\text{Eff}(N) = 2^S \setminus \emptyset$.

Preuve : Comme Eff $_G$ satisfait ces propriétés, et que μ est une bijection entre S et $\mu(S)$, ces propriétés sont transférées à Eff. ■

Prouvons à présent la direction (\Rightarrow).

Lemme 3 Soit G un pré-jeu booléen et T_i un sous-ensemble minimal de $\text{Eff}_G(i)$. Alors, $T_i = \{s \mid s \supseteq s_i\}$ pour tout $s_i \in S_i$.

Preuve : $X \in \text{Eff}_G(i)$ si X contient $S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_i^* \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$ pour certains $S_i^* \subseteq S_i$. Donc, les sous-ensembles minimaux de $\text{Eff}_G(i)$ sont exactement ceux de

la forme $S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times \{s_i\} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$, c'est-à-dire de la forme $\{s \mid s \supseteq s_i\}$. ■

A partir de maintenant, soit Eff une fonction d'effectivité coalitionnelle, satisfaisant fortement jouable, atomicité, décomposabilité et $\text{Eff}(N) = 2^S \setminus \emptyset$.

Remarquons tout d'abord que la décomposabilité implique que Eff est entièrement déterminée par $\{At(i), i \in N\}$.

Lemme 4 Pour chaque $s \in S$ il existe un unique (Z_1, \dots, Z_n) tel que pour tout i , $Z_i \in At(i)$ et $Z_1 \cap \dots \cap Z_n = \{s\}$.

Preuve : Soit $s \in S$. Comme $\text{Eff}(N) = 2^S \setminus \{\emptyset\}$, on a $\{s\} \in \text{Eff}(N)$, et par décomposabilité, il existe (T_1, \dots, T_n) tel que pour tout i , $T_i \in \text{Eff}(i)$ et $T_1 \cap \dots \cap T_n = \{s\}$.

Soit $i \in N$. Par définition de $At(i)$, il existe $Z_i \in At(i)$ tel que $s \in Z_i$ et $Z_i \subseteq T_i$. Supposons qu'il existe $Z'_i \in At(i)$ tel que $s \in Z'_i$ et $Z'_i \subseteq T_i$, $Z_i \cap Z'_i \neq \emptyset$, puisque s appartient à Z_i et à Z'_i . Donc, par atomicité, $Z_i = Z'_i$, et cela vaut pour tout i . ■

Le lemme 4 nous permet d'écrire $Z_i(s)$ pour chaque s que i est le seul sous-ensemble de $At(i)$ contenant s . Pour toute coalition non vide C , nous écrirons $Z_C(s) = \bigcap_{i \in C} Z_i(s)$.

Ensuite, nous construisons G^* à partir de Eff comme suit :

- Pour chaque i , on numérote $At(i)$: soit r_i une fonction bijective de $At(i)$ dans $\{0, 1, \dots, |At(i)| - 1\}$. Ensuite, on crée $p_i = \lceil \log_2 |At(i)| \rceil$ variables propositionnelles $x_i^1, \dots, x_i^{p_i}$. Enfin, on pose $V = \{x_i^j \mid i \in N, 1 \leq j \leq p_i\}$;
- Pour chaque i : $\pi_i = \{x_i^1, \dots, x_i^{p_i}\}$;
- Pour chaque i et chaque $j \leq p_i$, soit $\varepsilon_{i,j}$ le j ème chiffre dans la représentation binaire de i . On note que $\varepsilon_{i,p_i} = 1$ par définition de p_i . Si x est une variable propositionnelle, nous utiliserons alors la notation suivante : $0.x = \neg x$ et $1.x = x$. On définit ensuite

$$\gamma_i = \bigwedge_{j \in \{2, \dots, p_i\}, \varepsilon_{i,j}=0} \left(\bigwedge_{1 \leq k \leq j-1} \varepsilon_{i,j}.x_i^k \rightarrow \neg x_i^j \right)$$

- Enfin, pour chaque $s \in S$, soit $\mu(s) \in 2^V$ défini par : $x_i^j \in \mu(s)$ si et seulement si le j ème chiffre de la représentation binaire de $r_i(Z_i(s))$ est 1.

Pour chaque $i \in N$ et chaque $Z \in At(i)$, soit $k = r_i(Z)$ et $s_i(Z)$ la stratégie du joueur i dans G correspondant à la représentation binaire de k utilisant $\{x_i^1, \dots, x_i^{p_i}\}$, x_i^1 étant le bit le plus significatif. Par exemple, si $p_i = 3$ et $r_i(Z_i) = 6$ alors $s_i(Z) = (x_i^1, x_i^2, \neg x_i^3)$.

S_{G^*} dénote l'ensemble des états associés à G^* , eux-mêmes dénotés par s_{G^*} . L'ensemble des atomes de Eff_{G^*} est noté $At_{G^*}(i)$.

Remarque : Pour suivre cette construction, il peut être utile de voir comment elle fonctionne sur un exemple. Soit $N = \{1, 2, 3\}$, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C\}$, $At(1) =$

$\{1234, 5678, 9ABC\}$, $At(2) = \{13579B, 2468AC\}$, $At(3) = \{12569C, 3478AB\}$ ¹².

Par décomposabilité, on a $At(12) = \{13, 24, 57, 68, 9B, AC\}$, $At(13) = \{12, 34, 56, 78, 9C, AB\}$, et $At(23) = \{159, 37B, 26C, 48A\}$. $|At(1)| = 3$, donc $p_1 = 2$. $|At(2)| = |At(3)| = 2$, donc $p_2 = p_3 = 1$. Alors, $V = \{x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_3^1\}$.

Soit $At(1) = \{Z_0, Z_1, Z_2\}$, c'est-à-dire $r_1(1234) = 0$, $r_1(5678) = 1$ et $r_1(9ABC) = 2$. De même, $r_2(13579B) = 0$, $r_2(2468AC) = 1$, $r_3(12569C) = 0$ et $r_3(3478AB) = 1$.

Étudions $s = 6$. Nous avons $s = 5678 \cap 2468AC \cap 12569C$, et donc $s_{G^*} = \mu(s) = (\neg x_1^1, x_1^2, x_2^1, \neg x_3^1)$. Les contraintes sont $\gamma_1 = (x_1^1 \rightarrow \neg x_1^2)$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \top$.

On aura donc $G^* = (N, V, \pi, \Gamma)$ défini par $N = \{1, 2, 3\}$, $V = \{x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_3^1\}$, $\pi_1 = \{x_1^1, x_1^2\}$, $\pi_2 = \{x_2^1\}$, $\pi_3 = \{x_3^1\}$, $\gamma_1 = (x_1^1 \rightarrow \neg x_1^2)$ et $\gamma_2 = \gamma_3 = \top$.

Lemme 5 Pour tout $i \in N$ et $Z \in At(i)$: $\mu(Z) = \{s_{G^*} \in S_{G^*} \mid s_{G^*} \supseteq s_i(Z)\}$

Preuve : Soit $i \in N$ et $Z \in At(i)$. Soit $s_{G^*} \in \mu(Z)$; par définition de $\mu(Z)$, il existe un $s \in S$ tel que $\mu(s) = s_{G^*}$. Considérons la décomposition de s en atomes, c'est-à-dire $\{s\} = Z_1(s) \cap \dots \cap Z_n(s)$ (cf. Lemme 4). Par construction de μ , la projection de $\mu(s)$ sur $\{x_i^1, \dots, x_i^{p_i}\}$ correspond à la représentation binaire de $r_i(s)$. Donc $\mu(s) = s_{G^*}$ étend $s_i(Z)$.

Réciproquement, soit s_{G^*} tel que $s_{G^*} \supseteq s_i(Z)$. Pour tout $j \leq n$, soit k_j le nombre dont la représentation binaire de $\{x_j^1, \dots, x_j^{p_j}\}$ est la projection de s_{G^*} sur $\{x_j^1, \dots, x_j^{p_j}\}$. Soit s défini par $\{s\} = Z_1(k_1) \cap \dots \cap Z_n(k_n)$. Par construction de μ , nous avons $\mu(s) = s_{G^*}$. De plus, $Z_i(k_i) = Z$ par atomicité, c'est-à-dire $s \in Z$. Donc $s_{G^*} \in \mu(Z)$. ■

Preuve : (Propriété 1, fin)

Nous devons encore prouver que pour tout $C \subseteq N$ et tout $X \subseteq S$, $X \in \text{Eff}(C)$ est vrai si et seulement si $\mu(X) \in \text{Eff}_{G^*}(C)$.

La décomposabilité de Eff et Eff_{G^*} implique qu'il suffit de montrer que pour tout i et tout $X \subseteq S$, $X \in \text{Eff}(i)$ si et seulement si $\mu(X) \in \text{Eff}_{G^*}(i)$. Puisque Eff et Eff_{G^*} satisfont la propriété de coalition monotonie, il suffit de montrer que pour tout i , $Z_i \in At_{G^*}(i)$ implique $\mu(Z_i) \in \text{Eff}_{G^*}(i)$ et $T_i \in At_{G^*}(i)$ implique $\mu^{-1}(T_i) \in \text{Eff}(i)$.

Soit $Z_i \in At(i)$. Puisque $r(Z_i) \leq p_i$, nous avons $s_i(Z_i) = \gamma_i$, et donc $s_i(Z_i) \in \text{Eff}_{G^*}(i)$. Le lemme 5, montre que $\mu(Z_i) = \{s_{G^*} \mid s_{G^*} \supseteq s_i(Z_i)\}$. Donc, $\mu(Z_i) \in \text{Eff}_{G^*}(i)$. Réciproquement, soit $T_i \in At_{G^*}(i)$. Le lemme 3 montre que $T_i = \{s \mid s \supseteq s_i\}$ pour tout $s_i \in S_i$. Soit $s_i = (\epsilon_{i,1} \cdot x_1^1, \dots, \epsilon_{i,p_i} \cdot x_i^{p_i})$ et $q(s_i) = \sum_{k=1}^{p_i} 2^{p_i-k} \cdot \epsilon_{i,k}$. Remarquons que $q(s_i) \leq p_i$, car $s_i \in S_i$ implique $s_i \models \gamma_i$. A présent, soit $j = r_i^{-1}(q(s_i))$. Soit $Z_i^j \in At(i)$ tel que $r_i(Z_i^j) = j$. Nous avons $\mu(Z_i^j) = \{s \mid s \supseteq s_i\} = T_i$. Maintenant, $Z_i^j \in \text{Eff}(i)$, car $Z_i^j \in At(i)$. Donc, $\mu^{-1}(T_i) \in \text{Eff}(i)$.

¹²On omet les parenthèses pour les sous-ensembles de S : 1234 représente $\{1, 2, 3, 4\}$ et ainsi de suite.

Nous avons à présent prouvé que pour $C \subseteq N$ et tout $X \subseteq S$, $X \in \text{Eff}(C)$ est vrai si et seulement si $\mu(X) \in \text{Eff}_{G^*}(C)$. Donc, si Eff satisfait fortement jouable, atomicité, décomposabilité et $\text{Eff}(N) = 2^S \setminus \emptyset$, alors il existe un jeu $G (= G^*)$ et une fonction injective $\mu : S \rightarrow 2^V$ telle que pour tout $C \subseteq N$: $\text{Eff}_G(C) = \{\mu(X) \mid X \in \text{Eff}(C)\}$. ■

Propriété 2 Soit $N = \{1, \dots, n\}$ un ensemble d'agents, et $SC \in 2^{2^N}$ un ensemble de coalitions. Il existe un jeu booléen G sur N tel que l'ensemble des coalitions efficaces de G est SC (i.e. $\text{EC}(G) = SC$) si et seulement si SC satisfait ces deux propriétés :

- (1) $\emptyset \in SC$.
- (2) pour tout $I, J \in SC$ tel que $I \cap J = \emptyset$ alors $I \cup J \in SC$.

La preuve de cette propriété est également longue. Elle repose sur les lemmes 6 à 9.

Lemme 6 Soit I et J deux coalitions d'un jeu booléen G . Si I et J sont efficaces et que $I \cap J = \emptyset$, alors $I \cup J$ est efficace.

Preuve : Si I est efficace, alors nous savons que $\exists s_I \in S_I$ tel que $s_I \models \bigwedge_{i \in I} \phi_i$. Il en est de même pour J : $\exists s_J \in S_J$ tel que $s_J \models \bigwedge_{j \in J} \phi_j$. De plus, comme $I \cap J = \emptyset$, nous avons $(s_I, s_J) \models \bigwedge_{i \in I \cup J} \phi_i$, donc $I \cup J$ est une coalition efficace. ■

Le lemme 6 prouve la direction (\Rightarrow) de la Propriété 2. La direction (\Leftarrow) de cette preuve est plus complexe, et nécessite de construire le jeu booléen G suivant pour chaque ensemble de coalitions SC satisfaisant (1) et (2) :

- $V = \{\text{connect}(i, j) \mid i, j \in N\}$ (toutes les connexions possibles entre joueurs) ;
- $\forall i, \gamma_i = \top$;
- $\pi_i = \{\text{connect}(i, j) \mid j \in N\}$ (toutes les connexions à partir du joueur i) ;
- $\phi_i = \bigvee_{I \in SC, i \in I} F_I$, où

$$F_I = \left(\bigwedge_{j,k \in I} \text{connect}(j, k) \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in I, k \notin I} \neg \text{connect}(j, k) \right)$$

(le joueur i veut que tous les joueurs de sa coalition soient interconnectés, et qu'il n'y ait pas de connexion "sortant" de cette coalition).

Nous voulons montrer que l'ensemble $\text{EC}_G = SC$ (EC_G étant l'ensemble des coalitions efficaces pour G).

Commençons par montrer que $SC \subseteq \text{EC}_G$. Soit $I \in SC$. Si chaque agent $i \in I$ joue $(\bigwedge_{j \in I} \text{connect}(i, j)) \wedge (\bigwedge_{k \notin I} \neg \text{connect}(i, k))$, alors ϕ_i est satisfait pour tout $i \in I$. I est alors une coalition efficace pour G , et SC est inclus dans $\text{EC}(G)$.

Afin de prouver que $\text{EC}_G \subseteq SC$, établissons les lemmes suivants :

Lemme 7 Pour toute collection $\mathcal{SC} = \{C_i, i = 1, \dots, q\} \subseteq 2^{2^N}$, $\bigwedge_{1 \leq i \leq q} F_{C_i}$ est satisfiable si et seulement si pour tout $i, j \in \{1, \dots, q\}$, soit $C_i = C_j$, soit $C_i \cap C_j = \emptyset$.

Preuve :

(a) Si $C_1 = \dots = C_q = C$ alors $\bigwedge_{1 \leq i \leq q} F_{C_i} \equiv F_C$. Comme F_C est satisfait par toute interprétation assignant chaque $\text{connect}(i, j)$ tel que $i, j \in C$ à vrai, et chaque $\text{connect}(i, j)$ tel que $i \in C$ et $j \notin C$ à faux (l'instanciation des variables $\text{connect}(i, j)$ tel que $i, j \notin C$ est indifférente), F_C est consistant.

(b) Supposons à présent que pour tout $i, j \in \{1, \dots, q\}$, soit $C_i = C_j$, soit $C_i \cap C_j = \emptyset$.

Alors, $\bigwedge_{1 \leq i \leq q} F_{C_i}$ est équivalent à

$$\left(\bigwedge_{1 \leq i \leq q} \bigwedge_{j, k \in C_i} \text{connect}(j, k) \right) \quad \wedge \\ \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq q} \bigwedge_{j \in C_i, k \notin C_i} \neg \text{connect}(j, k) \right)$$

et $\bigwedge_{1 \leq i \leq q} F_{C_i}$ est satisfait par toute interprétation assignant chaque $\text{connect}(j, k)$ tel que j, k appartiennent au même C_i à vrai, et chaque $\text{connect}(j, k)$ tel que $j \in C_i$ pour chaque i et $k \notin C_i$ à faux. $\bigwedge_{1 \leq i \leq q} F_{C_i}$ est donc satisfiable.

(c) Supposons que pour tout $i, j \in \{1, \dots, q\}$, nous avons $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ et $C_i \neq C_j$. Soit $k \in C_i \cap C_j$ et (sans perte de généralité) $l \in C_i \setminus C_j$. Alors, $F_{C_i} \models \text{connect}(k, l)$ et $F_{C_j} \models \neg \text{connect}(k, l)$, donc $F_{C_i} \wedge F_{C_j}$ n'est pas satisfiable, et a fortiori, $\bigwedge_{1 \leq i \leq q} F_{C_i}$ non plus. ■

On définit à présent la *couverture d'une coalition* I par un sous-ensemble disjoint de \mathcal{SC} comme un tuple $\vec{C} = \langle C_i | i \in I \rangle$ de coalitions tel que : (a) pour chaque $k \in I$, $C_k \in \mathcal{SC}$; (b) pour tout $C_j, C_k \in \vec{C}$, soit $C_j = C_k$, soit $C_j \cap C_k = \emptyset$; (c) pour chaque $i \in I$, $i \in C_i$. Soit $\text{Cov}(\mathcal{SC}, I)$ l'ensemble de toutes les couvertures de I par un sous-ensemble disjoint de \mathcal{SC} .

Par exemple, si $\mathcal{SC} = \{\emptyset, 1, 24, 123, 124\}$ alors $\text{Cov}(\mathcal{SC}, 12) = \{\langle 1, 24 \rangle, \langle 123, 123 \rangle, \langle 124, 124 \rangle\}$ ¹³, $\text{Cov}(\mathcal{SC}, 123) = \{\langle 123, 123, 123 \rangle\}$, $\text{Cov}(\mathcal{SC}, 124) = \{\langle 1, 1, 24 \rangle, \langle 1, 24, 24 \rangle, \langle 124, 124, 124 \rangle\}$ et $\text{Cov}(\mathcal{SC}, 234) = \text{Cov}(\mathcal{SC}, 1234) = \emptyset$.

Lemme 8 Pour tout $I \neq \emptyset$, Φ_I est équivalent à $\bigvee_{\vec{C} \in \text{Cov}(\mathcal{SC}, I)} \bigwedge_{i \in I} F_{C_i}$.

Preuve :

$$\begin{aligned} \Phi_I &\equiv \bigwedge_{i \in I} \Phi_i \\ &\equiv \bigwedge_{i \in I} \left(\bigvee_{I \in \mathcal{SC}, i \in I} F_I \right) \\ &\equiv \bigvee_{\substack{\langle C_i, i \in I \rangle \\ \text{et } i \in C_i \text{ pour tout } i \in I}} \left(\bigwedge_{i \in I} F_{C_i} \right) \end{aligned}$$

Le lemme 7 montre que $\bigwedge_{i \in I} F_{C_i}$ est satisfiable si et seulement si pour tout $i, j \in I$, soit $C_i = C_j$, soit $C_i \cap C_j = \emptyset$. Donc, $\Phi_I \equiv \bigvee_{\vec{C} \in \text{Cov}(\mathcal{SC}, I)} \bigwedge_{i \in I} F_{C_i}$.

¹³Il y a 2 joueurs dans $I = \{1, 2\}$, donc chaque \vec{C} dans $\text{Cov}(\mathcal{SC}, 12)$ contient 2 coalitions, une pour chaque joueur, satisfaisant (a), (b) et (c).

Par exemple, si $\mathcal{SC} = \{1, 24, 123, 124\}$ alors $\Phi_{12} \equiv (F_1 \wedge F_{24}) \vee F_{123} \vee F_{124}$; $\Phi_{123} \equiv F_{123}$; $\Phi_{124} \equiv (F_1 \wedge F_{24}) \vee F_{124}$; $\Phi_{234} \equiv \perp$. ■

Lemme 9 Soit $I \subseteq 2^A$ et sachant que $\forall I, J \in \mathcal{SC}$, $I \cap J = \emptyset \Rightarrow I \cup J \in \mathcal{SC}$, Φ_I est satisfiable si et seulement si il existe $J \in \mathcal{SC}$ tel que $I \subseteq J$.

Preuve : Le cas $I = \emptyset$ est simple : $\Phi \equiv \top$ est satisfiable, et $\emptyset \in \mathcal{SC}$ par hypothèse, donc il existe $J \in \mathcal{SC}$ ($J = \emptyset$) tel que $I \subseteq J$.

Supposons à présent que $I \neq \emptyset$.

\Rightarrow Supposons que Φ_I est satisfiable. Le lemme 8 montre que si Φ_I est équivalent à $\bigvee_{\vec{C} \in \text{Cov}(\mathcal{SC}, I)} \bigwedge_{i \in I} F_{C_i}$, alors il existe un \vec{C} dans $\text{Cov}(\mathcal{SC}, I)$ tel que $\bigwedge_{i \in I} F_{C_i}$ est satisfiable, et donc $\text{Cov}(\mathcal{SC}, I)$ n'est pas vide. $\vec{C} \in \text{Cov}(\mathcal{SC}, I)$ implique que :

(a) Pour tout $i \in I$, $C_i \in \mathcal{SC}$;

(b) $I \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$

(c) pour tout $i, j \in I$, soit $C_i = C_j$, soit $C_i \cap C_j = \emptyset$.

A partir de (a), (c) et sachant que $\forall I, J \in \mathcal{SC}$, $I \cap J = \emptyset \Rightarrow I \cup J \in \mathcal{SC}$, on prouve que $\bigcup_{i \in I} C_i \in \mathcal{SC}$. (b) permet alors de montrer qu'il existe un $J \in \mathcal{SC}$ ($J = \bigcup_{i \in I} C_i$) tel que $I \subseteq J$.

\Leftarrow Supposons maintenant qu'il existe un $J \in \mathcal{SC}$ tel que $I \subseteq J$. Alors $\Phi_J \models \Phi_I$, et Φ_J est consistant (en considérant l'interprétation assignant chaque $\text{connect}(i, j)$ tel que $i, j \in J$ à vrai). ■

Preuve : (Propriété 2, fin)

Il reste à prouver que $\text{EC}_G \subseteq \mathcal{SC}$. Soit I une coalition efficace telle que $I \notin \mathcal{SC}$ (ce qui implique $I \neq \emptyset$, à cause de l'hypothèse $\emptyset \in \mathcal{SC}$).

– Si $I = N$ alors il n'existe pas de $J \in \mathcal{SC}$ tel que $I \subseteq J$ (car $I \notin \mathcal{SC}$), et alors le lemme 9 implique que Φ_I n'est pas satisfiable. I ne peut donc pas être efficace pour G .

– Supposons à présent que $I \neq N$ et définissons la \bar{I} -stratégie suivante $S_{\bar{I}}$ ($\bar{I} = N \setminus I$) : pour chaque $i \in \bar{I}$, $s_i = \{\neg \text{connect}(i, j) | j \in I\}$ (peu importe l'instanciation des variables $\text{connect}(i, j)$ telles que $j \notin I$). Soit $\vec{C} = \langle C_i, i \in I \rangle \in \text{Cov}(\mathcal{SC}, I)$.

Nous affirmons tout d'abord qu'il existe un $i^* \in I$ tel que C_{i^*} n'est pas contenue dans I . En effet, supposons que pour tout $i \in I$, $C_i \subseteq I$. Puisque $i \in C_i$ est vrai pour tout i , nous avons $\bigcup_{i \in I} C_i = I$. A présent, $C_i \in \mathcal{SC}$ pour tout i , et toutes les C_i, C_j distinctes sont disjointes deux à deux. La propriété amène $I \in \mathcal{SC}$, ce qui est faux par hypothèse.

Soit $k \in C_{i^*} \setminus I$ (un tel k existe car C_{i^*} n'est pas inclus dans I). Il faut que $\text{connect}(k, i^*)$ soit vrai pour satisfaire F_{C_i} car i et k sont dans C_i . On a donc $s_k \models \neg F_{C_i}$, et a fortiori $s_{\bar{I}} \models \neg F_{C_i}$, ce qui entraîne $s_{\bar{I}} \models \neg \bigwedge_{i \in I} F_{C_i}$.

Ceci étant vrai pour tout $\vec{C} \in Cov(\mathcal{S}C, I)$, nous avons $s_{\vec{I}} \models \bigwedge_{\vec{C} \in Cov(\mathcal{S}C, I)} \neg \bigwedge_{i \in I} F_{C_i}$, c'est-à-dire $s_{\vec{I}} \models \neg \bigvee_{\vec{C} \in Cov(\mathcal{S}C, I)} \bigwedge_{i \in I} F_{C_i}$. Avec le lemme 8, ceci entraîne $s_{\vec{I}} \models \neg \Phi_I$. Donc I ne contrôle pas Φ_I et I ne peut pas être efficace pour G . ■

Propriété 3 Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$ un jeu booléen. $s \in Noyau(G)$ si et seulement si s satisfait au moins un membre de chaque coalition efficace, c'est-à-dire, pour tout $C \in EC(G)$, $s \models \bigvee_{i \in C} \Phi_i$.

Preuve : $s = (s_1, \dots, s_n) \in Noyau(G)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & \nexists C \subset N \text{ tel que } \exists s_C \in S_C, \forall i \in C, \forall s_{-C} \in S_{-C}, \\ & \quad (s_C, s_{-C}) \succ_i s \\ \Leftrightarrow & \nexists C \subset N \text{ tel que } \exists s_C \in S_C, \forall i \in C, \forall s_{-C} \in S_{-C}, \\ & \quad ((s_C, s_{-C}) \models \Phi_i) \wedge (s \models \neg \Phi_i) \\ \Leftrightarrow & \nexists C \subset N \text{ tel que } \exists s_C \in S_C, \forall i \in C, \\ & \quad (s_C \models \Phi_i) \wedge (s \models \neg \Phi_i) \\ \Leftrightarrow & \nexists C \subset N \text{ tel que } \exists s_C \in S_C, \\ & \quad (s_C \models \bigwedge_{i \in C} \Phi_i) \wedge (s \models \bigwedge_{i \in C} \neg \Phi_i) \\ \Leftrightarrow & \nexists C \subset N \text{ tel que } \\ & \quad (s \models \bigwedge_{i \in C} \neg \Phi_i) \wedge (\exists s_C \in S_C, s_C \models \bigwedge_{i \in C} \Phi_i) \\ \Leftrightarrow & \forall C \subset N, \\ & \quad (s \models \bigvee_{i \in C} \Phi_i) \vee (\forall s_C \in S_C, s_C \models \bigvee_{i \in C} \neg \Phi_i) \\ \Leftrightarrow & \forall C \subset N, \\ & \quad \text{si } \exists s_C \in S_C : s_C \models \bigwedge_{i \in C} \Phi_i \text{ alors } s \models \bigvee_{i \in C} \Phi_i \end{aligned}$$

$\exists s_C \in S_C : s_C \models \bigwedge_{i \in C} \Phi_i$ signifie que la coalition C est efficace. On a donc $s = (s_1, \dots, s_n) \in Noyau(G)$ si et seulement si $\forall C \subset N$, si $C \in EC(G)$ alors $s \models \bigvee_{i \in C} \Phi_i$. ■

Propriété 4 Pour tout jeu booléen G , $Noyau(G) \neq \emptyset$.

Preuve : On construit l'ensemble de coalitions E comme suit. Tout d'abord, on initialise E à \emptyset . Ensuite, tant qu'il existe une coalition C dans $EC(G)$ telle que $C \cap C' = \emptyset$ est vrai pour tout $C' \in E$, on ajoute cette coalition C dans E ($E := E \cup \{C\}$). Une fois cet algorithme achevé, E est un ensemble de coalitions efficaces $\{C_i, i \in I\}$ toutes disjointes entre elles. Grâce à la Propriété 2, on sait que $\bigcup_{i \in I} C_i$ est efficace.

Il existe donc $s_E \in S_E$ tel que $s_E \models \bigwedge_{i \in E} \Phi_i$, et E contient au moins un élément de chaque coalition efficace (si ce n'était pas le cas, il resterait une coalition efficace C telle que l'intersection de C et de tous les C_i serait vide, et dans ce cas l'algorithme aurait continué de tourner, et incorporé C dans E).

Soit s un profil de stratégies étendant s_C . s satisfait au moins un membre de chaque coalition efficace, et donc grâce à la Propriété 3, $Noyau(G) \neq \emptyset$. ■

Propriété 5 Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$ un jeu booléen, et s un profil de stratégies. Si $s \in FNoyau(G)$, alors pour tout $C \in EC(G)$ et tout $i \in C$, $s \models \Phi_i$.

Preuve : Nous allons prouver que s'il existe $C \in EC(G)$ et s'il existe $i \in C$ tel que $s \models \neg \Phi_i$, alors $s \in FNoyau(G)$.

$$\begin{aligned} & \exists C \in EC(G), \exists i \in C \text{ tel que } s \models \neg \Phi_i \\ \Leftrightarrow & \exists C \subseteq N, \exists s_C \in S_C, \exists i \in C \text{ tel que } \\ & \quad (s_C \models \bigwedge_{j \in C} \Phi_j) \wedge (s \models \neg \Phi_i) \\ \Rightarrow & \exists C \subseteq N, \exists s'_C \in S_C, \forall s_{-C} \in S_{-C}, \exists i \in C \text{ tel que } \\ & \quad (((s'_C, s_{-C}) \models \Phi_i) \wedge (s \models \neg \Phi_i)) \wedge (s_C \models \bigwedge_{j \in C} \Phi_j) \\ \Rightarrow & \exists C \subseteq N, \exists s_C \in S_C, \forall s_{-C} \in S_{-C}, \exists i \in C \text{ tel que } \\ & \quad (((s_C, s_{-C}) \succ_i s) \wedge (\forall i \in C (s_C, s_{-C}) \succeq_i s)) \end{aligned}$$

On sait donc que si $\exists C \in EC(G)$ et $\exists i \in C$ tels que $s \models \neg \Phi_i$, alors $s \notin FNoyau(G)$. ■

Propriété 6 Soit $G = (N, V, \Gamma, \pi, \Phi)$ un jeu booléen. $FNoyau(G) \neq \emptyset$ si et seulement si $\bigcup \{C \subseteq N \mid C \in EC(G)\} \in EC(G)$, c'est-à-dire si et seulement si l'union de toutes les coalitions efficaces est efficace.

Preuve : Soit $MEC(G) = \bigcup_{C \subseteq N} \{C \in EC(G)\}$.¹⁴

\Leftarrow $FNoyau(G) \neq \emptyset$. Soit $s \in FNoyau(G)$. A partir de la Propriété 5, nous savons que $\forall C \in EC(G)$, $\forall i \in C$, $s \models \Phi_i$. Donc $\forall i \in MEC(G)$, $s \models \Phi_i$. Donc $MEC(G) \in EC(G)$.

\Rightarrow $MEC(G) \in EC(G)$. Soit $s_{MEC(G)} \in S_{MEC(G)}$ tel que $\forall s_{-MEC(G)}, s_{MEC(G)} \models \Phi_{MEC(G)}$. On cherche s tel que $s \in FNoyau(G)$.

Soit $s_{-MEC(G)} \in S_{-MEC(G)}$ tel que $MAX = \{i \mid s = (s_{MEC(G)}, s_{-MEC(G)}) \models \Phi_i\}$ soit maximal pour \subseteq . $s_{-MEC(G)}$ existe, dans le pire des cas $s \models \Phi_{MEC(G)}$. Comme MAX est maximal, on ne peut pas trouver un $C \subseteq N$ tel que $\exists s_C \in S_C$ tel que $\forall s_{-C} \in S_{-C}$, $\forall i \in C$, $(s_C, s_{-C}) \succeq_i s$, et $\exists i \in C$, $(s_C, s_{-C}) \succ_i s$. Si on suppose que C existe, alors $\forall i \in N$ tel que $s \models \Phi_i$, on a $s_C \models \Phi_i$, et $\exists i \in N$ tel que $s \not\models \Phi_i$ et $s_C \models \Phi_i$. Dans ce cas, MAX n'est pas maximal pour \subseteq . ■

Références

- [1] J. Abdou and H. Keiding. *Effectivity functions in social choice*. Kluwer, 1991.
- [2] D. Abraham, A. Blum, and T. Sandholm. Clearing algorithms for barter exchange markets : Enabling nationwide kidney exchange. In *Proceedings of EC-2007*, 2007. To appear.
- [3] R.J. Aumann. Acceptable points in general n-person games. In A.W. Tucker and R.D. Luce, editors, *Contributions to the Theory of Games IV*. Princeton University Press, 1959.

¹⁴ MEC signifie *Coalitions Efficaces Maximales*.

- [4] R.J. Aumann. A survey of cooperative games without side payments. In M. Shubik, editor, *Essays in Mathematical Economics in Honour of Oskar Morgenstern*. Princeton University Press, 1967.
- [5] E. Bonzon, M.C. Lagasquie-Schiex, and J. Lang. Compact preference representation for boolean games. In *Proc. of PRICAI'06*, volume 4099, pages 41–50. Springer-Verlag, 2006.
- [6] E. Bonzon, M.C. Lagasquie-Schiex, J. Lang, and B. Zanuttini. Boolean games revisited. In *Proc. of ECAI'06*, pages 265–269. Springer-Verlag, 2006.
- [7] P.E. Dunne and W. van der Hoek. Representation and complexity in boolean games. In *Proc. of JELIA2004*, volume LNCS 3229, pages 347–359. José Júlio Alferes et João Alexandre Leite (eds), 2004.
- [8] P. Harrenstein. *Logic in Conflict*. PhD thesis, Utrecht University, 2004.
- [9] P. Harrenstein, W. van der Hoek, J.J Meyer, and C. Witteveen. Boolean games. In J. van Benthem, editor, *Proc. of TARK 2001*, volume Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge, pages 287–298. Morgan Kaufmann, 2001.
- [10] H. Moulin. *The strategy of social choice*. North-Holland, 1983.
- [11] R.B. Myerson. *Game Theory : Analysis of Conflict*. Harvard University Press, 1991.
- [12] G. Owen. *Game Theory*. Academic Press, 1982.
- [13] M. Pauly. *Logic for Social Software*. PhD thesis, Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, 2001.
- [14] W. van der Hoek and M. Wooldridge. On the logic of cooperation and propositional control. *Artificial Intelligence*, 164(1-2) :81–119, 2005.
- [15] M. Wooldridge and P.E. Dunne. On the computational complexity of qualitative coalitional games. *Artificial Intelligence*, 158(1) :27–73, 2004.