Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 2e année, 2005–2006

Analyse pour l'ingénieur

Examen du 17 mai 2006

Nombre de pages de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Exercice 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer le rayon de convergence R de la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{x^n}{2n+1}$.

   Calculer ensuite, pour tout $x \in]-R,+R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Développer en série entière la fonction définie par : $f \,:\, x \longmapsto \ln\left(\dfrac{5-x^2}{3-x}\right)$.

Exercice 2.

1. Pour $a > 0$, on pose $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$.

   Calculer $\displaystyle\int_{D_a} \ln\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) dxdy$.

2. On pose $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$.

   Montrer que $\displaystyle\int_{D} \ln\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) dxdy$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 3.

On note f la fonction 2π-périodique et paire, définie pour $x \in [0,\pi]$ par $f(x) = \pi - x$ et
on note g la fonction 2π-périodique et impaire, définie pour $x \in]0,\pi]$ par $g(x) = \pi - x$.

1. Donner une représentation graphique de f et g (faire deux dessins distincts).
2. Calculer la série de Fourier de f.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
4. Calculer la série de Fourier de g.