Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 2e année, 2005–2006

ANALYSE POUR L'INGÉNIEUR

Examen de rattrapage, juin 2006

Nombre de pages de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Exercice 1.

Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer le rayon de convergence R de la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{n^3+5n+3}{n!}\,x^n$.

Calculer ensuite, pour tout $x \in]-R,+R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

Exercice 2.

On note f la fonction 2π-périodique et impaire, définie pour $x \in]0,\pi[$ par $f(x) = 1$.

1. Donner une représentation graphique de f.
2. Calculer la série de FOURIER de f.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

Exercice 3.

Quelle est la nature des intégrales impropres suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx\,, \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sin(1/x^2)}{\ln(1+x)}\,dx\,.$$

Exercice 4.

Soit $D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \,/\, x^2+y^2 > 0\,\}$.

Montrer que $\displaystyle\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)}\,dxdy$ est convergente et en déduire que $\displaystyle\int_D \frac{1}{(x+y)(1+x^2+y^2)}\,dxdy$ l'est aussi.