Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

CORRIGÉ DÉTAILLÉ DE L'EXAMEN PARTIEL
LICENCE 2ème année - ANALYSE POUR L'INGÉNIEUR

Année 2006 - 2007
2 avril 2007

Questions de cours :

1. Voir cours en ligne.

2. (i) $\Phi(x) = Mx + b = y \in \mathbb{R}^d$ et $y_i = \Phi_i(x_1, \dots, x_d) = \sum_{k=1}^{d} M_{ik} x_k + b_i$,
comme M est inversible le changement de variable Φ est une bijection de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$
On calcule $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(a) = M_{ij}$ pour $1 \le i, j \le n$, les d.p. sont donc continues et
on a $J(\Phi)(a) = M$ et $\det(J(\Phi))(a) = \det(M)$

2. (ii) Ici $\det(M) = 1$, M est inversible et Φ un changement de variable qui vérifie toutes les hypothèses.
$m(\Phi(A)) = \int_{\Phi(A)} 1 \, dx_1 \cdots dx_d = \int_A 1 \, |\det(M)| \, dy_1 \cdots dy_d = m(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

Exercice 1 :

$f(x) = x^\alpha \left(1 - e^{-1/\sqrt{x}}\right)$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$, elle est donc localement intégrable.

• Étude en 0^+ : $f(x) \sim_{0^+} x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$, on a convergence en 0 si et seulement si $\alpha > -1$.

• Étude en $+\infty$: on a $e^{-1/\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et
$f(x) = x^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = x^\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} (1 + k(x))$
où $k(x)$ tend vers zéro quand x tend vers plus l'infini, donc,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{1/2-\alpha}} \quad \text{quand} \quad x \to +\infty \, .$$

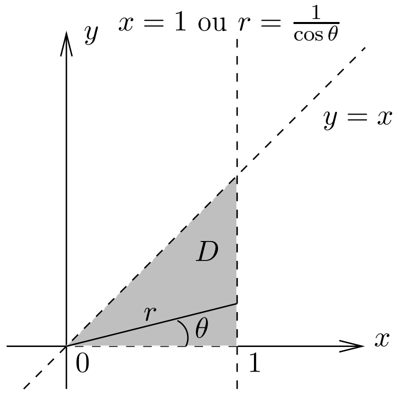
On a convergence en $+\infty$ si et seulement si $\alpha < -1/2$.

• Conclusion : l'intégrale impropre est convergente si et seulement si $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

Exercice 2 :

1.

On a $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$ qui est continue, donc intégrable sur D et on pourra appliquer les propositions du cours.



$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}\, [\text{Arctan}(y)]_{y=0}^{y=x}\, dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}\, \text{Arctan}(x)\, dx = \left[\frac{1}{2} \text{Arctan}^2(x) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi^2}{32}.$$

2. On utilise les coordonnées polaires $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, le jacobien vaut r et le domaine $A = \Phi^{-1}(D) = \left\{ (r,\theta) \,/\, 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}\,,\ 0 \leq r \leq \dfrac{1}{\cos(\theta)} \right\}$
donc

$$I = \int_D f(x,y)\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos(\theta)}} \frac{r}{(1+r^2\cos^2\theta)(1+r^2\sin^2\theta)}\, dr \right) d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos^2\theta}} \frac{1}{2(1+u\cos^2\theta)(1+u\sin^2\theta)}\, du \right) d\theta \quad \text{où on a posé } u = r^2$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos^2\theta}} \frac{\cos^2\theta}{\cos(2\theta)} \frac{1}{1+u\cos^2(\theta)} - \frac{\sin^2\theta}{\cos(2\theta)} \frac{1}{1+u\sin^2(\theta)}\, du \right) d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(2\theta)} \left[\ln\left(\frac{1+u\cos^2\theta}{1+u\sin^2\theta} \right) \right]_{u=0}^{u=\frac{1}{\cos^2\theta}} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2\cos^2\theta)}{\cos(2\theta)}\, d\theta$$

3. Posons $g(\theta) = \dfrac{\ln(2\sin^2\theta)}{2\cos(2\theta)} = \dfrac{\ln 2}{2\cos(2\theta)} + \dfrac{\ln(\sin\theta)}{\cos(2\theta)} = \dfrac{\ln(1-\cos(2\theta))}{2\cos(2\theta)}$.

• Étude en 0^+ : le signe de $g(\theta)$ est constant négatif et

$$g(\theta) \sim_{0^+} \frac{\ln 2}{2} + \ln(\sin\theta) \sim_{0^+} \frac{\ln 2}{2} + \ln(\theta)$$

où la dernière somme est une fonction de signe constant négatif, intégrable en 0^+.

• Étude en $\frac{\pi}{4}^-$: le signe de $g(\theta)$ est constant négatif et $\cos(2\theta) = -\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(h)$ où $h = 2\theta - \frac{\pi}{2}$ tend vers 0^- quand θ tend vers $\frac{\pi}{4}^-$, d'où

$$\cos(2\theta) \sim_{h\to 0^-} -h \quad \text{ et } g(\theta) \sim_{h\to 0^-} \frac{\ln(1+h)}{-2h} \sim_{0^-} -\frac{1}{2}.$$

La fonction g admet donc un prolongement par continuité en $\frac{\pi}{4}^-$ et y est intégrable.

• L'intégrale est donc convergente et K existe.

4. Posons $h(t) = \dfrac{\ln t}{1-t^2} = \dfrac{\ln t}{(1-t)(1+t)}$.

• Étude en 0^+ : $h(t) \sim_{0^+} \ln t$, d'où intégrale convergente en 0^+.

• Étude en 1^- :

$$h(t) = \frac{\ln t}{2(1-t)} = \frac{\ln(1-h)}{2h} \text{ où } h = 1-t, \text{ d'où } h(t) \sim_{h\to 0^+} \frac{-h}{2h} = -\frac{1}{2}\,,$$

d'où convergence en 1^-.

• L'intégrale est donc convergente et J existe.

• Montrons que $J = -I + K$:

$$K - I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2\sin^2\theta) - \ln(2\cos^2\theta)}{2\cos(2\theta)}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan\theta)}{\cos(2\theta)}\,d\theta\ ,$$

on pose $t = \tan\theta$, alors $dt = (1+\tan^2\theta)\,d\theta$ et comme $\cos(2\theta) = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$, on a

$$I - K = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1-t^2}\ln t\,\frac{dt}{1+t^2} = J\,.$$

• En reprenant les calculs du **2**, on vérifie que l'on peut interpréter K comme étant l'intégrale de f sur le domaine

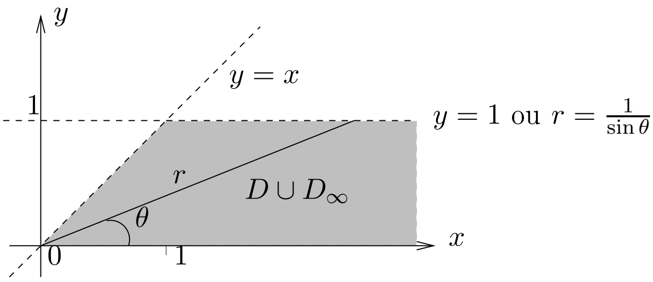
$$\left\{(r,\theta)\,/\,0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}\,,\,0 \leq r \leq \frac{1}{\sin\theta}\right\} = \{(x,y)\,/\,0 \leq x\,,0 < y \leq \min(x,1)\,\}$$

Donc

$$K = -\int_{D\cup D_\infty} f(x,y)\,dxdy$$

$$= -I - \int_{D_\infty} f(x,y)\,dxdy$$

où $D_\infty = [1,+\infty[\times[0,1]$.



Or $D_n = [1,n]\times[0,1] \nearrow D_\infty$ et

$$\int_{D_n} f(x,y)\,dxdy = \left(\int_1^n \frac{dx}{1+x^2}\right)\left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}\right) = \left(\mathrm{Arctan}(n) - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4} \to \frac{\pi^2}{16}\quad (n\to\infty)\,.$$

d'où $K = \displaystyle\int_{D\cup D_\infty} f(x,y)\,dxdy = -I - \frac{\pi^2}{16}$

et $J = K - I = -2I + \dfrac{\pi^2}{16} = -\dfrac{\pi^2}{8}$.