

Licence 2^e année, 2006–2007

ANALYSE POUR L'INGÉNIEUR

Examen du 15 juin 2007

Nombre de pages de l'énoncé : 1. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Questions de cours

1. Soient f et g des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
Donner la définition de $f = o(g)$, $f = O(g)$ et $f \sim g$ au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction 2π -périodique et intégrable sur $[0, 2\pi]$.
Donner la définition des coefficients de FOURIER de f et de la série de FOURIER de f .
Énoncez le théorème de DIRICHLET.

Exercice 1. Soit f une fonction impaire 2π -périodique telle que si $x \in]0, \pi[$, $f(x) = 1$.

1. Dessiner le graphe de f sur $] -4\pi, 4\pi[$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f .
3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.
4. Déterminer la valeur de la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$, en déduire celle de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on pose $f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{n/2}}$.

Soit $D_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$, où $0 < a < b$.

1. Déterminer, en fonction de a , b , et n l'intégrale $\int_{D_{a,b}} f(x, y) dx dy$.
2. Que se passe-t-il si a tend vers 0 ? (Justifiez vos résultats)
3. Que se passe-t-il si b tend vers $+\infty$? (Justifiez vos résultats)
4. Quel résultats les calculs précédents vous évoquent-ils ?