Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 2e année, 2006–2007

Analyse pour l'ingénieur

Partiel du 2 avril 2007

Nombre de pages de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Questions de cours

1. Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Donner la définition de $f = o(g)$ et $f \sim g$ au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. On définit la fonction $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $(d \geq 2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par :
   $\Phi(x) = M\,x + b$, où M est une matrice carrée, de taille d inversible et $b \in \mathbb{R}^d$.
   (i) Calculer la matrice jacobienne $J(\Phi)$ et le jacobien $\det(J(\Phi))$.

   (ii) Application : on fixe $d = 2$, $M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par $\Phi(x) = M\,x$.

   Soit $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $a_i < b_{i,\,(i=1,2)}$ un pavé de $\mathbb{R}^2$,
   calculer l'aire $m(\Phi(A))$.

Exercice 1.

Déterminer la nature de l'intégrale suivante, en fonction du paramètre réel α :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \left(1 - e^{-1/\sqrt{x}}\right) dx \,.$$

Exercice 2.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$
   où $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1\,;\, y > 0\,; \quad y < x\}$. Représentez D.

2. Démontrer l'égalité suivante : $\displaystyle\int_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos(2\theta)}\,d\theta$
   (on pourra passer en coordonnées polaires puis poser $u = r^2$).

3. Soit $K = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(2\sin^2\theta)}{2\cos(2\theta)}\,d\theta$. Étudier la convergence de K.

4. Soit $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt$.
   Vérifier que J est convergente et montrer que J peut s'écrire comme une combinaison linéaire de I et de K. En déduire J.