Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DÉTAILLÉ DE L'EXAMEN PARTIEL
LICENCE 2ème année - ANALYSE POUR L'INGÉNIEUR

Année 2007- 2008   19 mars 2008

Questions de cours :

1. f est de classe $\mathcal{C}^2$ si f admet des dérivées partielles d'ordre un et deux sur Ω, et que les dérivées partielles d'ordre deux sont continues sur Ω.

2. La fonction réelle $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est obtenue par composition, sa dérivée va dépendre des dérivées partielles de $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, avec $h(t) = a + t\,v$. On a :

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+tv)\, v_i = < \nabla f(a+tv), v > \quad .$$

3. D'après 2. on a $\varphi'(0) = < \nabla f(a), v >$.
Or par définition, $\varphi'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t} = D_v f(a)$
est la dérivée directionnelle de f en a dans la direction v.
On retrouve le résultat donné en cours : $D_v f(a) = < \nabla f(a), v >$.

Exercice 1 :

a) Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la fonction f est définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, elle est donc continue et différentiable.
Les dérivées partielles d'ordre un sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \; .$$

Note : comme $f(x,y) = f(y,x)$ un seul calcul est nécessaire !
On constate que les d.p. d'ordre un sont continues et différentiables par rapport à chacune de leurs variables. De façon générale, en fixant par exemple la variable y, on remarque que f et ses d.p. d'ordre un, sont dérivables par rapport à x à tout ordre, tant que l'on ne se trouve pas au point $(0,0)$ (c'est-à-dire $x = y = 0$).

b) La fonction f est définie en $(0,0)$, il faut donc vérifier que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0\,.$$

Or, pour $(x,y) \neq (0,0))$, on a $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$.
Donc $f(x,y)$ est indépendant de la distance à l'origine $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et n'admet pas de limite pour $(x,y) \underset{\neq}{\to} (0,0)$, f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

c) Par définition de la dérivée partielle de f par rapport à x on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \; .$$

Par symétrie, on a de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

d) On a déjà calculé les d.p. d'ordre un sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en a). Avec les calculs de c) on peut donc affirmer que les d.p. d'ordre un de f existent sur $\mathbb{R}^2$.
Pour étudier la continuité on procède comme en b) : il faut vérifier que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Or pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{r}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$$

pour $\theta \neq \pi/4 + n\,\pi/2$, cette expression tend vers l'infini, quand r tend vers 0.
On obtient un résultat équivalent pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, on en déduit que les d.p. partielles d'ordre un ne sont pas continues en $(0,0)$.

e) Pour étudier l'existence des dérivées partielles secondes en 0, il faut revenir à la définition de la dérivée. On a vu que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0\,,0) = 0$. Donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0\,,0) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(0\,,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\frac{\partial f}{\partial x}(h\,,0)$$

Or, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(h\,,0) = 0$, donc : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0\,,0) = 0$. De même :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0\,,0) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(0\,,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,h) = 0$$

Pour les dérivées « croisées », on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0\,,0) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(0\,,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\frac{\partial f}{\partial y}(h\,,0) = \frac{1}{h}\,h\frac{h^2}{h^4} = +\infty$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0\,,0) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(0\,,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,h) = \frac{1}{h}\,h\frac{h^2}{h^4} = +\infty$$

Ces dérivées croisées n'existent donc pas.

Exercice 2 :

1. Calcul de la matrice jacobienne de $g(r\,,\theta) = (g_1(r\,,\theta)\,, g_2(r\,,\theta))$:

$$D_g = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial r}(r\,,\theta) & \dfrac{\partial g_1}{\partial \theta}(r\,,\theta) \\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial r}(r\,,\theta) & \dfrac{\partial g_2}{\partial r}(r\,,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\sin\theta \\[2ex] \sin\theta & r\,\cos\theta \end{pmatrix}$$

2. Si on remarque que la matrice jacobienne de l'identité $((x\,,y) \rightarrow (x\,,y))$ est la matrice identité I_2, comme la matrice jacobienne de la composée de deux applications est le produit des matrices jacobiennes de ces deux applications, on a : $Dg.D(g^{-1}) = D(g \circ g^{-1}) = I_2$ et donc : $D(g^{-1}) = (Dg)^{-1}$.

   Le calcul de l'inverse de la matrice est immédiat : transposée de la matrice des cofacteurs de D_g, divisée par le déterminant de D_g :
   $\left|D_g\right| = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$. D'où :

$$D_{g^{-1}} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\,\cos\theta & r\,\sin\theta \\ \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   .

   Cette matrice est définie en dehors de l'origine : $r \neq 0$.