

Licence 2^e année, 2007–2008

ANALYSE POUR L'INGÉNIEUR

Examen du 11 juin 2008

Nombre de pages de l'énoncé : 1. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Question de cours

Énoncer précisément le théorème de Fubini.

Exercice 1.

On pose $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$
et on définit la fonction f sur D par $f(x, y) = x + y + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

1. Les dérivées partielles du premier et du second ordre existent-elles sur D tout entier ? sinon, sur quelle partie Ω incluse dans D ?

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

2. Chercher les extréma de f sur Ω .

Exercice 2.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on pose $f(x, y) = \frac{2xy(2 - 3x)}{x^2 + 2y^2}$ et

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0 \text{ et } y^2 < \frac{1}{2} - x\}$

1. Représenter D .
2. Calculer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$. Conclusion ?
3. Montrer que f est continue et bornée sur D .

4. Calculer $\int \int_D f(x, y) dx dy$.

Exercice 3.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} , impaire, 2π -périodique et telle que pour tout $x \in [0, \pi[$, on a $f(x) = x$.

1. Tracer f sur $[-3\pi, +3\pi]$. Que peut-on dire de la régularité de f ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f : $a_0(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$, $n \geq 1$.
3. Écrire la série de Fourier associée à f .