UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Licence 2^{e} année, 2007–2008

Analyse pour l'ingénieur

Partiel du 19 mars 2008

Nombre de pages de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a, v \in \Omega$.
On pose $\varphi(t) = f(a + t\,v)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$, c-à-d $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.
   Donner la définition de cette hypothèse.
2. Calculer $\varphi'(t)$.
3. Exprimer $\varphi'(0)$ de deux façons différentes.
   En déduire une expression pour la dérivée directionnelle de f.

Exercice 1. Soit la fonction réelle f définie dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \qquad f(0,0) = 0\,.$$

a) Montrer que f est continue et admet des dérivées partielles continues de tous les ordres dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Montrer que f n'est pas continue au point $(0,0)$.

c) Montrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$.

d) Calculer les dérivées partielles premières et étudier leur continuité en $(0\,,0)$.

e) Les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0\,,0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0\,,0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0\,,0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0\,,0)$$

Existent-elles ?

Exercice 2.

Soit g la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0\,,2\pi[$ par

$$g(r\,,\theta) = (r\cos\theta\,, r\sin\theta)\ .$$

1. Calculer la matrice jacobienne Dg de g.
2. On considère l'application réciproque de g, notée g^{-1}, vérifiant $g^{-1} \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$.
   Sans calculer g^{-1}, donner sa matrice jacobienne Dg^{-1}.
   Où celle-ci est-elle définie ?