UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Licence 2e année, 2008–2009

ANALYSE POUR L'INGÉNIEUR

Corrigé du partiel du 30 mars 2009

Questions de cours

Voir le cours, pages 13 et 14 sur le résumé (site web).

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = y^2 \sin\frac{x}{y} \quad \text{pour} \quad y \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x,0) = 0$$

1. f est définie sur $\mathbb{R}^2$ puisqu'une valeur est donnée à la fonction pour la seule valeur de y interdite par le calcul : $f(x,0) = 0$.
2. Sur U, la fonction : $(x\,,y) \longrightarrow \dfrac{x}{y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, puisque quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. La fonction f est une composée de cette fonction et des fonctions sinus et produit qui sont aussi de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$).
3. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, f admet des dérivées partielles en tout point de U. On a :
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) = y^2\,\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y} = \boxed{y\,\cos\dfrac{x}{y}}$
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) = 2y\,\sin\dfrac{x}{y} - y^2\,\dfrac{x}{y^2}\,\cos\dfrac{x}{y} = \boxed{2y\,\sin\dfrac{x}{y} - x\cos\dfrac{x}{y}}$

   En dehors de U, c'est-à-dire sur l'axe des abscisses, il faut revenir à la définition de la dérivée pour montrer qu'il y a une dérivée en tout point de la forme : $(x_0\,,0)$.
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x\,,0) - f(x_0\,,0)}{x - x_0}$$
   Or, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x\,,0) = 0$. La fonction $f(x\,,0)$ est donc constante par rapport à x et sa dérivée partielle par rapport à x est donc nulle.
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{y}(f(x_0\,,y) - f(x_0\,,0)) = \lim\limits_{y\to 0} y\,\sin\dfrac{x_0}{y} = 0$, puisque $\sin\dfrac{x_0}{y}$ est borné.
4. Si $y \neq 0$, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) = y\,\cos\dfrac{x}{y}$ qui est donc continue.

   Il reste à montrer la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en tout point $(x_0\,,0)$. On a vu que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,0) = 0$;

   Il faut donc calculer : $\lim\limits_{(x\,,y)\to(x_0\,,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) = \lim\limits_{(x\,,y)\to(x_0\,,0)} y\,\cos\dfrac{x}{y}$.

   On a $\forall(x\,,y) : 0 \leq |y\,\sin\dfrac{x}{y}| \leq |y|$. La limite est donc nulle et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
5. Pour que la fonction f soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faut que les deux dérivées partielles soient continues sur $\mathbb{R}^2$, or $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,0) = 0$, d'après 3.

   Et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) = 2y\,\sin\dfrac{x}{y} - x\cos\dfrac{x}{y}$ n'a pas de limite en $(x\,,0)$ puisque $2y\,\sin\dfrac{x}{y}$ a pour limite 0 quand y tend vers 0 et $x\cos\dfrac{x}{y}$ n'a pas de limite dans les mêmes conditions.

Exercice 2. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x+y\,,x-y)$. Calculer les dérivées partielles de $f \circ g$

1. Sans calculer $f \circ g$.

   Puisqu'on ne calcule pas $f \circ g$, il faut utiliser le théorème des fonctions composées. Page 27 des notes de cours, on a :

   $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{on pose} \quad h = f \circ g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$

   $D_j h(a) = \sum_{i=1}^{d} D_i f(g(a))\, D_j g_i(a) \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq d$

   En adaptant à notre cas : $d = 2$, on pose : $g(x\,,y) = (u(x,y)\,,v(x,y))$ avec $u(x\,,y) = x+y$ et $v(x\,,y) = x-y$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y)\,,v(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x\,,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y)\,,v(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(x\,,y) \\
&= 2u(x,y)\cos(u^2(x,y) - v^2(x,y)) - 2v(x,y)\cos(u^2(x,y) - v^2(x,y)) \\
&= 2(x+y)\cos(4xy) - 2(x-y)\cos(4xy) \\
&= 4y\cos(4xy)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y)\,,v(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}(x\,,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y)\,,v(x,y))\frac{\partial v}{\partial y}(x\,,y) \\
&= 2u(x,y)\cos(u^2(x,y) - v^2(x,y)) + 2v(x,y)\cos(u^2(x,y) - v^2(x,y)) \\
&= 2(x+y)\cos(4xy) + 2(x-y)\cos(4xy) \\
&= 4x\cos(4xy)
\end{aligned}$$

2. Après calcul de $f \circ g$.

   Le calcul de $h = f \circ g$ est très simple :

$$h(x,y) = f(x+y\,,x-y) = \sin((x+y)^2 - (x-y)^2) = \sin(4xy)$$

   On retrouve ainsi les deux dérivées partielles calculées à la question précédente.