

Licence 2^e année, 2008–2009

ANALYSE POUR L'INGÉNIEUR

Examen du 25 mai 2009

Nombre de pages de l'énoncé : 1. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

1. Énoncez de façon précise le théorème de FUBINI en dimension deux.
2. Énoncez de façon précise le théorème de changement de variables pour une intégrale double.

Exercice 1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x(\ln^2(x) + y^2)$.

1. Donner le domaine de définition $D \subset \mathbb{R}^2$ de f .
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Étudier l'existence d'extremums locaux de f sur D .
4. Montrer que f admet une borne inférieure sur D .
En déduire que f admet un minimum absolu sur D .
5. Montrer que f n'est pas majorée sur D .

Exercice 2. Soient a et b tels que $0 < a < b$, on pose

$$A = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 / a \leq xy \leq b, x \leq y, y^2 - x^2 \leq 1 \right\}.$$

1. Représenter A dans le plan Oxy .

2. On définit $\Psi : A \subset (\mathbb{R}_+)^2 \rightarrow (\mathbb{R}_+)^2$ par $\Psi(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Calculer la matrice jacobienne de Ψ , $D\Psi(x, y)$.

Exprimez A en fonction de (u, v) et représentez $\tilde{A} = \Psi(A)$ dans le plan Ouv .

3. On pose $\Phi = \Psi^{-1}$. Que vaut $\det(D\Phi(x, y))$? (on n'a pas besoin de déterminer Φ !)
4. Utiliser ce qui précède pour proposer un changement de variables qui permet de calculer l'intégrale double

$$I = \iint_A (y^2 - x^2)(x^2 + y^2) dx dy.$$