

Licence 2<sup>e</sup> année, 2008–2009

## ANALYSE POUR L'INGÉNIEUR

Examen du 25 mai 2009

Nombre de pages de l'énoncé : 1. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

*Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.*

---

### Questions de cours

1. Énoncez de façon précise le théorème de FUBINI en dimension deux.
2. Énoncez de façon précise le théorème de changement de variables pour une intégrale double.

**Exercice 1.** Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $f(x, y) = x(\ln^2(x) + y^2)$ .

1. Donner le domaine de définition  $D \subset \mathbb{R}^2$  de  $f$ .
2. Déterminer les points critiques de  $f$ .
3. Étudier l'existence d'extremums locaux de  $f$  sur  $D$ .
4. Montrer que  $f$  admet une borne inférieure sur  $D$ .  
En déduire que  $f$  admet un minimum absolu sur  $D$ .
5. Montrer que  $f$  n'est pas majorée sur  $D$ .

**Exercice 2.** Soient  $a$  et  $b$  tels que  $0 < a < b$ , on pose

$$A = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 / a \leq xy \leq b, x \leq y, y^2 - x^2 \leq 1 \right\}.$$

1. Représenter  $A$  dans le plan  $Oxy$ .

2. On définit  $\Psi : A \subset (\mathbb{R}_+)^2 \rightarrow (\mathbb{R}_+)^2$  par  $\Psi(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ .

Calculer la matrice jacobienne de  $\Psi$ ,  $D\Psi(x, y)$ .

Exprimez  $A$  en fonction de  $(u, v)$  et représentez  $\tilde{A} = \Psi(A)$  dans le plan  $Ouv$ .

3. On pose  $\Phi = \Psi^{-1}$ . Que vaut  $\det(D\Phi(x, y))$ ? (on n'a pas besoin de déterminer  $\Phi$ !)
4. Utiliser ce qui précède pour proposer un changement de variables qui permet de calculer l'intégrale double

$$I = \iint_A (y^2 - x^2)(x^2 + y^2) dx dy.$$