Licence 2e année, 2009–2010

Analyse pour l'ingénieur
Corrigé du partiel du 9 avril 2010

Exercice 1.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Pour étudier la continuité de f au point $(0,0)$, on utilise les coordonnées polaires : $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ pour $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Alors, pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $f(x,y) = f(r,\theta) = r\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(r^2)$.
Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} f(r,\theta) = 0 = f(0,0)$
car $\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(r^2)$ est bornée pour tout (r,θ).
On en déduit la continuité de f à l'origine.

b) Détermination des d.p. de f.
• Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos(x^2+y^2) - \frac{2x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin(x^2+y^2)$$

En remarquant que $f(x,y) = f(y,x)$, l'on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos(x^2+y^2) - \frac{2y^2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin(x^2+y^2)$$

• On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0.$$

De même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

• Finalement, f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$, la question suivante va étudier la continuité de ces fonctions.

c) La fonction f est classe $\mathcal{C}^1$ si les d.p. sont continues. D'après la question précédente, ceci est le cas en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ puisque les dérivées partielles de f sont composés de fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

Étudions la continuité des dérivées partielles de f au point $(0,0)$. On a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{r\to 0} \Big(\sin^3\theta \cos(r^2) - 2r^2 \cos^2\theta \sin\theta \sin(r^2) \Big) = \sin^3\theta$$

Cette limite n'existe pas, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue à l'origine.
De même, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos^3\theta$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'est pas continue à l'origine.
Conclusion : la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

d) Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par : $g(u,v) = (u+v, u-v)$ et $w = f \circ g$.
La matrice jacobienne de w au point $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est donnée par :

$$Dw(u_0,v_0) = Df(g(u_0,v_0))Dg(u_0,v_0)$$

et un calcul facile montre que $Dg(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Par ailleurs, $Df(g(u_0,v_0)) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(g(u_0,v_0))\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(g(u_0,v_0))\right]$.

En remarquant que $x^2+y^2 = 2(u^2+v^2)$, l'on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(g(u_0,v_0)) &= \frac{(u_0-v_0)^3}{(2(u_0^2+v_0^2))^{\frac{3}{2}}}\cos(2(u_0^2+v_0^2)) - \frac{2(u_0+v_0)^2(u_0-v_0)}{\sqrt{2(u_0^2+v_0^2)}}\sin(2(u_0^2+v_0^2)) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(g(u_0,v_0)) &= \frac{(u_0+v_0)^3}{(2(u_0^2+v_0^2))^{\frac{3}{2}}}\cos(2(u_0^2+v_0^2)) - \frac{2(u_0-v_0)^2(u_0+v_0)}{\sqrt{2(u_0^2+v_0^2)}}\sin(2(u_0^2+v_0^2))
\end{aligned}$$

Donc

$$Dw(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{2u_0(u_0^2+3v_0^2)\cos(2(u_0^2+v_0^2))}{(2(u_0^2+v_0^2))^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{4u_0(u_0^2-v_0^2)\sin(2(u_0^2+v_0^2))}{\sqrt{2(u_0^2+v_0^2)}} \\ \\ \dfrac{-2v_0(3u_0^2+v_0^2)\cos(2(u_0^2+v_0^2))}{(2(u_0^2+v_0^2))^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{4v_0(u_0^2-v_0^2)\sin(2(u_0^2+v_0^2))}{\sqrt{2(u_0^2+v_0^2)}} \end{pmatrix}^t$$

Exercice 2.
a) La formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(0,0)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
f(h_1,h_2) &= f(0,0) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \frac{1}{2}h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \\
&\quad + \frac{1}{2}h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) + h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) + o(\|h\|^2)
\end{aligned}$$

Pour $f(x,y) = (x-y)e^{xy}$, on a $f(0,0) = 0$, on peut aussi remarquer que $f(y,x) = -f(x,y)$.
On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= (1+xy-y^2)e^{xy} & \text{d'où } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 1 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -(1+xy-x^2)e^{xy} & \text{d'où } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= -1 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= e^{xy}(2y+xy^2-y^3) & \text{d'où } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -e^{xy}(2x+x^2y-x^3) & \text{d'où } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= -e^{xy}(2y-2x+xy^2-x^2y) = e^{xy}(x-y)(2+xy) & \text{d'où } \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= 0
\end{aligned}$$

Finalement,

$$f(h_1,h_2) = h_1 - h_2 + o(\|h\|^2).$$

b) Pour déterminer les points critiques de f on va chercher les points a qui annulent la gradient de f :

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+xy-y^2)e^{xy} \\ \\ -(1+xy-x^2)e^{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où le système

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+xy-y^2=0 \\ 1+xy-x^2=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2-y^2 & = & 0 \\ 1+xy-x^2 & = & 0 \end{array} \right. \qquad (*)$$

Or $x^2-y^2=0$ entraîne $x=y$ ou $x=-y$.
Pour $x=y$, l'équation (*) donne $1=0$, ce qui est impossible, donc $x=-y$.
Pour $x=-y$, l'on obtient $2x^2=1$, donc $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$
Les poins critiques de f sont donc $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.
En utilisant les calculs de la question précédente, on a

$$H_f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Dont la forme quadratique associée est donnée par :

$$q_{(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})}(h_1,h_2) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\left[h_1^2+h_2^2-6h_1h_2\right] = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\left[(h_1^2-3h_2^2)^2-8h_2^2\right]$$

Donc, $q_{(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})}(h_1,h_2)$ peut être négative ou positive selon les valeurs h_1 et h_2.
On peut donc conclure que le point $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ est un point selle.
Par ailleurs,

$$H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On constate que $H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = -H_f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$,
on en déduit facilement que $q_{(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}(h_1,h_2) = -q_{(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})}(h_1,h_2)$.
Le point $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ est donc aussi un point selle.