

Licence 2^e année, 2009–2010

ANALYSE POUR L'INGÉNIEUR

Examen du 17 mai 2010

Nombre de pages de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

Soit f une fonction 2π périodique et de classe C^1 sur \mathbb{R} .

1. Donner la définition des coefficients de Fourier a_0 , a_n et b_n , $n \geq 1$, de la fonction f .
2. Donner la définition de la série de Fourier, $S(f)$ associée à f .
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque, que peut-on dire de $f(x)$ et $S(f)(x)$?

Exercice 1.

Étudier la continuité au point $(0, 0)$ pour chacune des fonctions suivantes :

$$1. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad 2. g(x, y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| < |y| \\ y^2 & \text{si } |x| \geq |y| \end{cases} .$$

Exercice 2. Étudier l'existence et la nature de points critiques pour les fonctions suivantes :

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit f par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.
2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit g par $g(x, y) = (y^2 - x^2)(y^2 - 2x^2)$.

Exercice 3.

On pose

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, y^2 \geq x, x^2 + y^2 \leq 12 \right\}.$$

1. Tracer les courbes définies par $y^2 = x$ et $x^2 + y^2 = 12$. Déterminer leur intersection.
2. Représenter D dans le plan Oxy .
3. Exprimer D en coordonnées polaires.

4. Calculer $\text{Aire}(D) = \iint_D 1 \, dx dy$.