UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Licence 2e année, 2009–2010

ANALYSE POUR L'INGÉNIEUR

Examen du 22 juin 2010

Nombre de pages de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$.

1. Écrire la formule de TAYLOR, à l'ordre 2, pour f au voisinage de a.
2. Montrer que si a est un maximum local de f, alors $\nabla f(a) = O$.

Exercice 1.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 \\ y - x \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Montrer que f est une bijection sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la fonction réciproque $f^{-1}(u, v)$.
2. Est-ce que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$?
3. Calculer la matrice jacobienne de f, $Df(x, y)$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. Déterminer $D(f^{-1})(u, v)$.
5. Est-ce que f est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$?
6. Sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ a-t-on l'égalité : $D(f^{-1})(u, v) = [Df(f^{-1}(u, v))]^{-1}$?

Exercice 2.

Étudier l'existence et la nature de points critiques pour les fonctions suivantes :

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit f par $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2x - 4y$.
2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit g par $g(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

Exercice 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f_n(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{n}{2}}} \quad \text{et} \quad D_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 < a^2 \right\}.$$

1. Calculer $I_{(n,a)} = \displaystyle\iint_{D_a} f_n(x, y)\, dxdy$.
2. Déterminer, si elle existe, la valeur de $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} I_{(n,a)}$.