UFR de Mathématiques et Informatique

45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 2e année, 2009–2010

Analyse pour l'ingénieur

Partiel du 9 avril 2010

Nombre de pages de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$.

1. Écrire la formule de Taylor, à l'ordre 2, pour f au voisinage de a.
2. Montrer que si a est un minimum local de f, alors $\nabla f(a) = O$.

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} cos(x^2+y^2) & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

a) Étudier la continuité de f à l'origine.
b) Calculer des dérivées partielles de f.
c) Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? (Justifier)
d) Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par : $g(u,v) = (u+v, u-v)$
Calculer la matrice jacobienne de $f \circ g$ au point $(u_0, v_0) \in R^2$.

Exercice 2.

a) Donner la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(0,0)$ pour la fonction suivante :

$$f(x,y) = (x-y)e^{xy}$$

b) Déterminer les points critiques de f puis déterminer leur nature.