

Licence 2<sup>e</sup> année, 2010–2011

ANALYSE POUR L'INGÉNIEUR

Examen du 16 mai 2011

Nombre de pages de l'énoncé : 1. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

---

**Question de cours** Énoncez le théorème de Fubini.

**Exercice 1.**

Soient  $0 < a < b$  et  $f$  la fonction définie sur  $D = [0, 1] \times [a, b]$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^y & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $D$ .
2. Justifier que l'on peut calculer de deux façons différentes  $\int_D f(x, y) dx dy$ ,
3. En déduire la valeur de  $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ .

**Exercice 2.**

Soit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$g(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre un de  $g$  en tout point  $(x, y) \neq (0, 0)$ .
3. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Exercice 3.**

Étudier les extréma sur  $\mathbb{R}^2$  de la fonction définie par  $h(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ , où  $a \in \mathbb{R}$ .