

Licence 2^e année, 2010–2011

ANALYSE POUR L'INGÉNIEUR

Examen du 16 mai 2011

Nombre de pages de l'énoncé : 1. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Question de cours Énoncez le théorème de Fubini.

Exercice 1.

Soient $0 < a < b$ et f la fonction définie sur $D = [0, 1] \times [a, b]$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^y & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur D .
2. Justifier que l'on peut calculer de deux façons différentes $\int_D f(x, y) dx dy$,
3. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$.

Exercice 2.

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre un de g en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$.
3. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 3.

Étudier les extréma sur \mathbb{R}^2 de la fonction définie par $h(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, où $a \in \mathbb{R}$.