UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

UFR de Mathématiques et Informatique

45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 2^e^ année, 2010–2011

Analyse pour l'ingénieur

Examen du 20 juin 2011

Nombre de pages de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Question de cours

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $a, v \in \Omega$.
On pose $\varphi(t) = f(a + t\,v)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\varphi'(t)$.
2. Exprimer $\varphi'(0)$ de deux façons différentes.
   En déduire une expression pour la dérivée directionnelle de f.

Exercice 1.

On considère l'application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

où α, β et γ sont des paramètres réels.

1. Étudier la continuité de g au point $(0,0)$ en fonction des paramètres.
2. Montrer que g admet des dérivées partielles au point $(0,0)$.

Exercice 2.

Étudier les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction définie par $h(x,y) = (3x+4)e^{-(x^2+y^2)}$.

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes, à chaque fois on représentera le domaine d'intégration :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{D_1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2+2)^2}$ où $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq a\}$, avec $a > 0$.
   Que se passe-t-il quand a tend vers $+\infty$?
2. $I_2 = \displaystyle\int_{D_2} x^2\, dxdy$ où $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0, x^2+y^2 \leq 2, x^2+y^2 \geq 1\}$.