UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 2^{e} année, 2010–2011

Analyse pour l'ingénieur

Partiel du 28 mars 2011

Nombre de pages de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Question de cours Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$.
Montrer que si a est un minimum local de f, alors $\nabla f(a) = O$.

Exercice 1.
Donner un développement limité de $f(x,y) = x^y$ à l'ordre 2 en $(1,0)$.

Exercice 2.
Soit $f \; : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles de f en tout point (x,y) où $y \neq 0$.
3. Où est-ce que f est de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on pose, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(x,y) = f(x, f(x,y)).$$

Calculer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f.
Attention à utiliser des notations claires et non ambiguës.

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, on pose, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\[2ex] f'(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner le domaine de définition de g, noté $\mathrm{Dom}(g)$.
2. Montrer que g est continue sur $\mathrm{Dom}(g)$.
3. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,a)$ pour $a \in \mathbb{R}$.