Analyse pour l'Ingénieur

Georges KOEPFLER

UFR de Mathématiques et Informatique

Université Paris Descartes

45 rue des Saints-Pères

75270 PARIS cedex 06, France

Plan

- *Comparaison locale de fonctions*
- *Fonctions à plusieurs variables réelles*
- *Intégrales multiples*
- *Séries de* FOURIER

Comparaison locale de fonctions

Comparaison locale de fonctions

On va présenter trois types de relations locales entre deux fonctions f et g en un point x_0 de $\overline{\mathbb{R}}$:

(E) f et g sont **équivalentes** quand x tend vers x_0 ;

(N) f est **négligeable** devant g quand x tend vers x_0 ;

(D) f est **dominée** par g quand x tend vers x_0.

Pour $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ on va définir un **voisinage de** x_0 $V(x_0)$:
• si $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $V(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x - x_0| < \varepsilon\} =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, pour $\varepsilon > 0$ donné (*suffisamment petit*) ;
• si x_0 est "$+\infty$", alors $V(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \,/ x > A\} =]A, +\infty[$, pour $A > 0$ donné (*suffisamment grand*) ;
• si x_0 est "$-\infty$", alors $V(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \,/ x < -A\} =] - \infty, -A[$, pour $A > 0$ donné (*suffisamment grand*) ;

Comparaison locale de fonctions : équivalence

Définition. Soit $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ est **équivalent** à $g(x)$ quand x tend vers x_0,
s'il existe un voisinage de x_0, $V(x_0)$, et une fonction $k : D \cap V(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$
telle que $f(x) = g(x)k(x)$ pour tout $x \in D \cap V(x_0)$ et $\lim_{x \to x_0} k(x) = 1$.

On note $\underline{f(x) \sim g(x) \text{ pour } x \to x_0}$.

Proposition. *Soit $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g, f_1, g_1 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) \sim g(x)$ pour $x \longrightarrow x_0$ et $f_1(x) \sim g_1(x)$ pour $x \longrightarrow x_0$. Alors*

$$f(x)f_1(x) \sim g(x)g_1(x) \qquad \text{pour } x \longrightarrow x_0 \ ;$$

$$\text{si } 0 \notin f_1(D), 0 \notin g_1(D) : \quad \frac{f(x)}{f_1(x)} \sim \frac{g(x)}{g_1(x)} \text{ pour } x \longrightarrow x_0 \ ;$$

$$\text{mais, en général} \ : \ f(x) + f_1(x) \not\sim g(x) + g_1(x) \qquad \text{pour } x \longrightarrow x_0 \ .$$

Comparaison locale de fonctions : négligeable

Définition. Soit $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ est **négligeable** devant $g(x)$ quand x tend vers x_0,
s'il existe un voisinage de x_0, $V(x_0)$, et une fonction $k : D \cap V(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$
telle que $f(x) = g(x)k(x)$ pour tout $x \in D \cap V(x_0)$ et $\lim_{x \to x_0} k(x) = 0$.

On note $\underline{f(x) = o(g(x)) \text{ pour } x \to x_0}$.

Proposition. *$f(x) \sim g(x)$ pour $x \longrightarrow x_0$ si et seulement si*
$f(x) - g(x) = o(g(x))$ pour $x \longrightarrow x_0$.

Exemples :

- $\Big(f(x) = o(1)$ pour $x \to x_0\Big) \Leftrightarrow \Big(\lim_{x \to x_0} f(x) = 0\Big)$
- $\ln(x) = o(x^\alpha)$ quand $x \to +\infty$ et $x^\alpha = o(e^x)$ quand $x \to +\infty$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Comparaison locale de fonctions : dominé

Définition. Soit $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ est **dominé** par $g(x)$ quand x tend vers x_0,
s'il existe un voisinage de x_0, $V(x_0)$, et $M \in \mathbb{R}_+^*$
telle que $|f(x)| \leq M\,|g(x)|$ pour tout $x \in D \cap V(x_0)$.

On note $\underline{f(x) = O(g(x)) \text{ pour } x \longrightarrow x_0}$.

Exemple :

$$\Big(f(x) = O(1) \text{ pour } x \to x_0\Big) \Leftrightarrow \Big(f(x) \text{ reste borné pour } x \to x_0\Big)$$

Remarques.

- $o(g(x))$, resp. $O(g(x))$, désigne une <u>fonction</u> négligeable devant, resp. dominée par, $g(x)$ quand x tend vers x_0.
- Écrire uniquement $o(g(x))$ ou $O(g(x))$ (sans indiquer x_0) n'a pas de sens.

Comparaison locale de fonctions

$$\begin{array}{rclrclrcl}
O(f) \pm O(f) & = & O(f), & O(O(f)) & = & O(f), & O(f)O(g) & = & O(fg), \\
o(f) \pm o(f) & = & o(f), & o(o(f)) & = & o(f), & o(f)o(g) & = & o(fg), \\
O(f) \pm o(f) & = & O(f), & O(o(f)) & = & o(f), & o(O(f)) & = & o(f).
\end{array}$$

Exemples :

$\sin(x) = o(\sqrt{x})$ quand $x \to 0$ et $\sin(x) = O(x)$ quand $x \to 0$.

$$3N^2 + N - 1 + \frac{N-2}{\sqrt{N}} + N\ln(N) = O(N^2) \text{ quand } N \to +\infty.$$

Fonctions de plusieurs variables réelles

Introduction

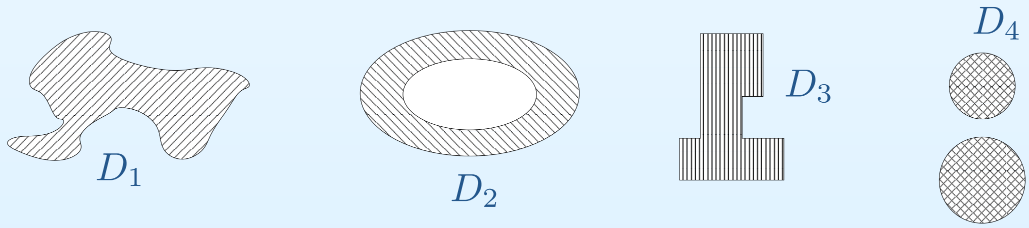
On se propose d'étudier des fonctions qui dépendent de plus que d'un seul paramètre réel et qui sont à valeurs réelles :

$$x = (x_1, \dots, x_d) \in D \subset \mathbb{R}^d \longmapsto f(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R} \, .$$

où $D \subset \mathbb{R}^d$ est le domaine de définition de la fonction f.
Le **graphe de** f est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{d+1}$:

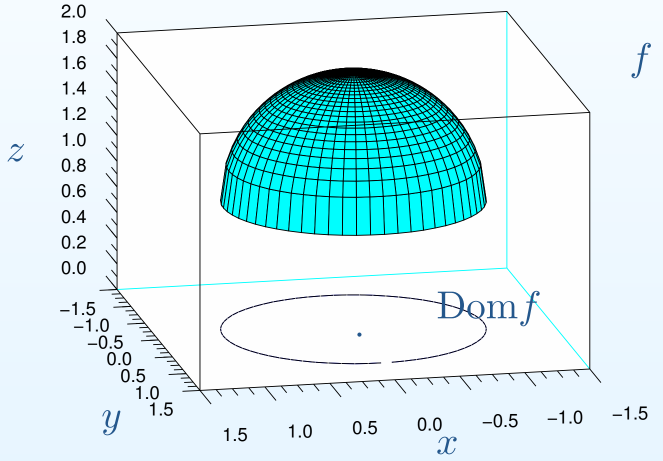
$$(x_1, \dots, x_d, f(x_1, \dots, x_d)) \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

Les domaines D inclus dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$,...) peuvent avoir des formes très diverses et pour aller d'un point $a \in D$ à un point $b \in D$ il existe en général une infinité de chemins, en opposition avec la situation sur la droite réelle $\mathbb{R}$!



Introduction : exemple

Exemple : La fonction $f(x,y) = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ est définie pour tout $(x,y) \in \mathrm{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Son graphe est une **surface** incluse dans $\mathbb{R}^3$:



Dans la suite on va se demander si cette fonction est :
continue, régulière, intégrable.

Norme, suites

On définit la **norme euclidienne** d'un point $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ par :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2} \ .$$

Ceci permet de calculer la distance entre deux points x et y de $\mathbb{R}^d$:

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_d - y_d)^2}$$

On dira qu'une suite de points de $\mathbb{R}^d$, $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers un point $x \in \mathbb{R}^d$ ssi :

$$\lim_{n \to +\infty} \|x^{(n)} - x\| = 0 \ .$$

où $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_d^{(n)})$ et $x = (x_1, \ldots, x_d)$.

Norme, suites (suite)

Comme en dimension 1, on écrit la définition de la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x^{(n)} - x\| = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : \|x^{(n)} - x\| < \varepsilon$$

Exemples :
Trouver les limites des suites suivantes ($\rho > 0$)
$x^{(n)} = \rho^n e^{i\,n}$ et $y^{(n)} = (\rho^n, \rho^{2n})$.
Tracer les chemins.

Ensembles ouverts dans $\mathbb{R}^d$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, un *voisinage ouvert* de x dans $\mathbb{R}^d$ est donné par la **boule** ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^d$ et de rayon ε

$$B_o(x, \varepsilon) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \,/\, \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_d - x_d)^2} < \varepsilon \right\}$$

Un ensemble $\Omega \subset$ est un **ouvert** de $\mathbb{R}^d$ si pour tout point $x \in \Omega$ il existe un voisinage ouvert inclus dans Ω.

Grâce au produit cartésien, on obtient des ouverts de $\mathbb{R}^d$ à partir d'ouverts de $\mathbb{R}$:
$]0,1[\times]0,1[=]0,1[^2$ est la carré unité ouvert de $\mathbb{R}^2$;
$]0,1[\times]0,1[\times]0,1[=]0,1[^3$ est la cube unité ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Limite de fonctions

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{R}$, $a \in D \subset \mathbb{R}^d$, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x : \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

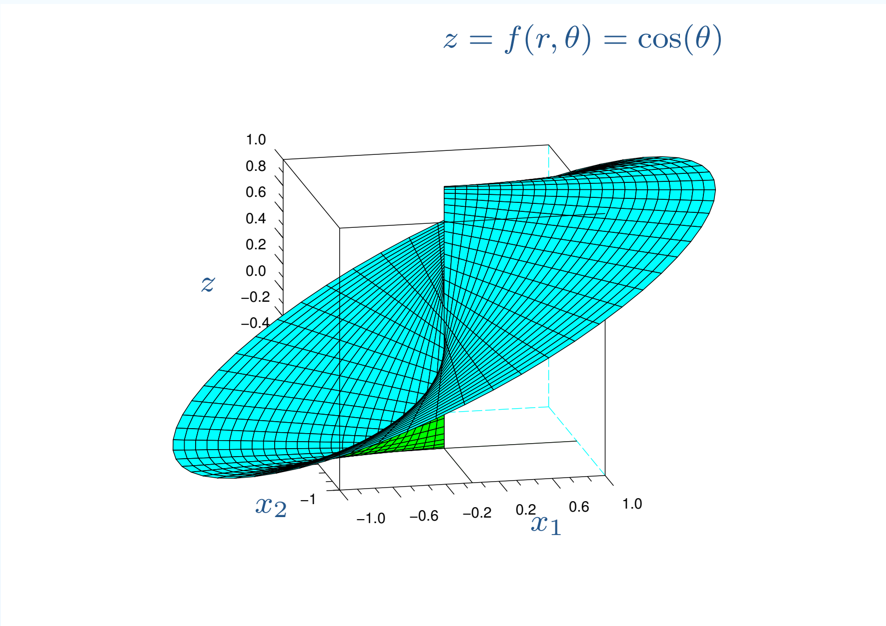
ou, de façon équivalente,
si pour toute suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in D$ qui tend vers a : $\lim_{n \to +\infty} f(x^{(n)}) = l$.

Attention, le calcul des limites dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ est plus difficile que dans $\mathbb{R}$, calculer : $\lim_{(x_1,x_2) \to (0,0)} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$.

Limite de fonctions, exemple

En utilisant les coordonnées polaires :

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \cos(\theta) = f(r, \theta) \ .$$



Continuité

Une fonction $f : x \in D \subset \mathbb{R}^d \longmapsto f(x)$ est continue en $a \in D$ ssi

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x : \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

La somme, la différence, le produit, la division et la composition d'un nombre fini de fonctions continues est une fonction continue (sur le domaine de définition adéquat !)

Dérivée directionnelle

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

On veut étudier la *variation de* f au voisinage de $a \in \Omega$:
on va d'abord se restreindre à un problème 1D,
i.e. un segment passant par le point a.

Soit $v \in \mathbb{R}^d$, la dérivée de f au point a, dans la direction v, est définie par

$$D_v f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(f(a + h\, v) - f(a) \Big) \qquad (h \in \mathbb{R}) \ .$$

Si $v = e_i$, on obtient la dérivée partielle de f par rapport à la i^{e}variable, notée, $D_i f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Fonctions dérivées partielles

On a

$$D_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_d) - f(a)\Big) \quad (h \in \mathbb{R})\ .$$

La dérivée partielle de f en a par rapport à la i^{e}-variable s'obtient en laissant fixe toutes les variables, sauf la i^{e}.

On définit les <u>fonctions</u> dérivées partielles $\begin{array}{rccc} \frac{\partial f}{\partial x_i} : & \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{array}$.

Ce sont des fonctions de d variables !

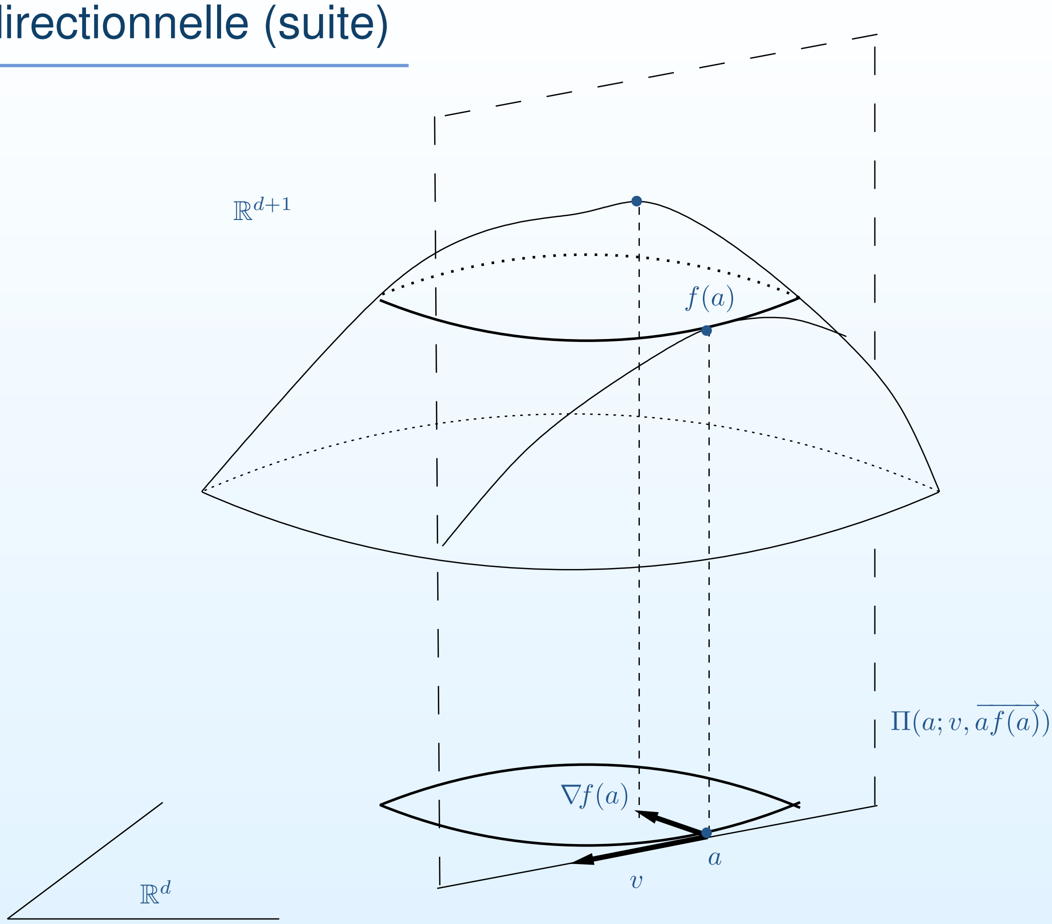
Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ on dérive f par rapport à sa i^{e}-variable,

en considérant que les autres variables sont des constantes.

Exemple : $f(x, y) = x^2 y$, alors

$D_1 f(a) = 2a_1 a_2$ et $D_2 f(a) = a_1^2$ où $a = (a_1, a_2)$.

Dérivée directionnelle (suite)



Différentielle

Pour étudier la *variation de* f au voisinage de $a \in \Omega$
on peut aussi *approximer* f par une fonction plus “simple” au voisinage de a.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. On dit que f
est différentiable en $a \in \Omega$
s’il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ qui vérifie

$$\|f(a+u) - f(a) - L(u)\| = o(\|u\|) \qquad (u \in \mathbb{R}^d) \; .$$

On note $L = df_a$ la différentielle de f en a et $Df(a) \in \mathcal{M}(m,d)$ la matrice associée est appelée matrice jacobienne.

Pour $m = 1$, la matrice jacobienne est un vecteur ligne.

Quel est le lien entre les dérivées directionnelles de f en a, pour toute direction v, et la matrice jacobienne de f en a ?

Dérivée directionnelle et différentielle

Proposition. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable au point $a \in \Omega$, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^d$:*

$$D_v f(a) = df_a(v) \; = Df(a)\, v.$$

La matrice jacobienne s’écrit $\quad \mathrm{D}f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix} \; .$

$$D_v f(a) = \sum_{i=1}^{d} v_i \, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = < \nabla f(a), v > = \nabla f(a)^t \, v$$

où $\nabla f(a) = (Df(a))^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix}$ *est le gradient de f au point a.*

Attention : la réciproque est fausse, il existe des fonctions pour lesquelles toutes les dérivées directionnelles existent et qui ne sont pas différentiables.

Matrice jacobienne pour $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Proposition. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable, c-à-d qu'il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^m$ qui approxime f et dont la matrice jacobienne est $Df(a) \in \mathcal{M}(m,d)$.*

Si on note $f_1, \ldots, f_m$, les fonctions coordonnées de f : $f = (f_1, \ldots, f_m)$ où $f_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$.

La matrice jacobienne s'écrit

$$\mathrm{D}f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_d}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix}.$$

Dérivée directionnelle et différentielle (suite)

Proposition. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$. Si au point a toutes les dérivées partielles $D_i f(a)$, $1 \leq i \leq d$, existent et si les fonctions $x \mapsto D_i f(x)$ $1 \leq i \leq d$, sont continues dans un voisinage de a, alors f est différentiable en a.*

On dit que f est <u>continûment différentiable</u>, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, si on a continuité des d.p. en tout point de l'ouvert Ω.

On dit que f est <u>de classe $\mathcal{C}^p$</u>, $f \in \mathcal{C}^p(\Omega, \mathbb{R})$, si on a <u>existence</u> et <u>continuité</u> des d.p. jusqu'à l'ordre p en tout point de l'ouvert Ω.

Dans la suite, on va considérer des fonctions suffisamment régulières, c.-à-d. de *classe* $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$, ainsi ne se posera plus la question de différentiabilité.

Différentielle de fonctions composées

Proposition. *Soient* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *des fonctions différentiables. On pose* $h = f \circ g$, *alors* $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ *est différentiable et, pour tout* $a \in \mathbb{R}^d$ *:*

$$dh_a = df_{g(a)} \circ dg_a \; .$$

Pour les matrices jacobiennes : $\qquad Dh(a) = Df(g(a))\, Dg(a) \quad$ *ou*

$$\begin{pmatrix} D_1h_1(a) & \dots & D_dh_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1h_p(a) & \dots & D_dh_p(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_1f_1(g(a)) & \dots & D_mf_1(g(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1f_p(g(a)) & \dots & D_mf_p(g(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1g_1(a) & \dots & D_dg_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1g_m(a) & \dots & D_dg_m(a) \end{pmatrix} .$$

Différentielle de fonctions composées, exemple 1

• Si $d = p = 1$, m quelconque : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, donc $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h(a) = f(g_1(a), \dots, g_m(a)) \in \mathbb{R}$, pour $a \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} h'(a) &= Df(g(a))\, Dg(a) \\ &= \begin{pmatrix} D_1f(g(a)) & \dots & D_mf(g(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1'(a) \\ \vdots \\ g_m'(a) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{m} D_if(g(a))\, g_i'(a) \; . \end{aligned}$$

Différentielle de fonctions composées, exemple 2

• Si $d = m$, $p = 1$: $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

donc $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $h(a) = f(g_1(a), \dots, g_d(a)) \in \mathbb{R}$, pour $a \in \mathbb{R}^d$.

On a $\quad D_j h(a) = \sum_{i=1}^{d} D_i f(g(a))\, D_j g_i(a)$, pour $1 \leq j \leq d$

et

$$\begin{aligned} Dh(a) &= \begin{pmatrix} D_1 h(a) & \dots & D_d h(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_1 f(g(a)) & \dots & D_d f(g(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 g_1(a) & \dots & D_d g_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_d(a) & \dots & D_d g_d(a) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bijections et continuité

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^n$, $(m \leq n)$.
On dit que f est un **homéomorphisme** de A sur B ssi
f est *continue* et *bijective* et si la réciproque f^{-1} est *continue*.

Exemples :
$f : B(O,1) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x_1, x_2) = \frac{1}{1-\sqrt{x_1^2+x_2^2}}(x_1, x_2)$ est un homéomorphisme ;

$g : [0, 2\pi[\subset \mathbb{R} \to \mathcal{C}(O,1) \subset \mathbb{R}^2$ avec $g(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ n'est pas un homémorphisme ;

$h : \mathbb{R} \to \Delta \subset \mathbb{R}^2$ avec $h(t) = (t, at+b)$ et $\Delta = h(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Proposition : L'homémorphisme f transforme un ensemble ouvert de A en un ensemble ouvert de B.

Bijections et différentiabilité

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, on suppose ici $m = n$!
On dit que f est un $\mathcal{C}^1$-**difféomorphisme** de Ω sur $f(\Omega)$ ssi
f est de *classe* $\mathcal{C}^1$ et *bijective* et si la réciproque f^{-1} est de *classe* $\mathcal{C}^1$.

Exemples :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^3$ n'est pas un difféomorphisme ;

$g : \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)/x \in \mathbb{R}_+\}$
avec $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un difféomorphisme.

Proposition : Pour le difféomorphisme f et si $y = f(x) \in f(\Omega)$, les matrices jacobiennes $Df(x)$ et $Df^{-1}(y)$ sont inverses l'une de l'autre :

$$Df(x)Df^{-1}(y) = Df^{-1}(y)Df(x) = I_n \ ; \quad Df^{-1}(y) = \Big(Df(x)\Big)^{-1} .$$

Dérivées partielles d'ordre deux

Proposition. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.
On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. La différentielle d'ordre 2, $d^2 f_a$ est une forme bilinéaire symétrique, dont la matrice s'écrit*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} D_{11}f(a) & D_{12}f(a) & \dots & D_{1d}f(a) \\ D_{21}f(a) & D_{22}f(a) & \dots & D_{2d}f(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{n1}f(a) & D_{n2}f(a) & \dots & D_{dd}f(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq, i, j \leq d} .$$

C'est la matrice hessienne de f en a, pour $h, k \in \mathbb{R}^d$:
$$d^2 f_a(h,k) = h^t \, H_f(a) \, k \, .$$

Note : grâce à la régularité $\mathcal{C}^2$ de f on a identité des fonctions d.p. :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \, 1 \leq i, j \leq n.$$

Formule de Taylor à l'ordre 2

Proposition (Formule de TAYLOR à l'ordre 2)**.**
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.
On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + df_a(h) + \tfrac{1}{2}\, d^2 f_a(h,h) + o(\|h\|^2) \\ &= f(a) + (\nabla f(a))^t\, h + \tfrac{1}{2}\, h^t\, H_f(a)\, h + o(\|h\|^2) \qquad (h \in \mathbb{R}^d)\ . \end{aligned}$$

Cas particulier : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2)$ et $h = (h_1, h_2)$:

$$\begin{aligned} f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1,a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(a)h_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(a)h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)h_1h_2 + o(h_1^2+h_2^2)\ . \end{aligned}$$

Extrémas locaux

Définition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.
Alors a est un minimum local (strict) de f sur Ω si pour tout $x \in \mathcal{V}(a)$:
$f(a) \leq f(x)$, (resp. $f(a) < f(x)$).
Alors a est un maximum local (strict) de f sur Ω si pour tout $x \in \mathcal{V}(a)$:
$f(a) \geq f(x)$, (resp. $f(a) > f(x)$).
Dans les deux cas on parle d'extrémum local.

Définition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.
On dit que a est un point critique de f si $\nabla f(a) = O$.

Proposition (CN d'ordre 1)**.**
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in \Omega$.
Si a est un extrémum local, alors a est un point critique, càd $\nabla f(a) = O$.

Attention, c'est une CN : $f(x,y) = x^2 - y^2$ admet comme point critique $a = (0,0)$ qui n'est pas un extrémum local !

Extrémas locaux : fonctions de deux variables

Définition. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ et H la matrice symétrique associée : $q(h) = h^t\, H\, h$ pour tout $h \in \mathbb{R}^2$.
On dit que q, resp. H, est

- dégénérée, s'il existe $h \in \mathbb{R}^2$ non nul, tel que $q(h) = 0$;
- définie positive si pour tout $h \in \mathbb{R}^2$ non nul, $q(h) > 0$;
- définie négative si pour tout $h \in \mathbb{R}^2$ non nul, $q(h) < 0$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$ fixé. La matrice hessienne de f en a est symétrique et définit une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} q(h) = h^t\, H_f(a)\, h &= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(a)\, h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)\, h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(a)\, h_2^2. \end{aligned}$$

Extrémas locaux : fonctions de deux variables (suite)

Proposition (CS d'ordre 2)**.**
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$ un point critique de f.
On note q la forme quadratique définie par $H_f(a)$:
(a) si q est définie positive, alors a est un minimum local strict ;
(b) si q est définie négative, alors a est un maximum local strict ;
(c) s'il existe $h, h' \in \mathbb{R}^2$ non nuls, tel que $q(h) > 0$ et $q(h) < 0$, alors a est un point selle ;
(d) si q est dégénérée positive ou dégénérée négative, on ne peut pas conclure directement.

Note : ces résultats concernent les extrémas locaux, pour savoir si un point est un extrémum global il faut faire une analyse appropriée.

Extrémas locaux : fonctions de deux variables, exemples

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(0,0)$ est un minimum strict ;
(b) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, $(0,0)$ est un maximum strict ;
(c) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(0,0)$ est un point selle ;
(d) $f(x,y) = x^2$, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $(0,\beta)$ est point critique et c'est un minimum ;
(d') $f(x,y) = x^2 + y^3$, $(0,0)$ est point critique unique, c'est un point selle.

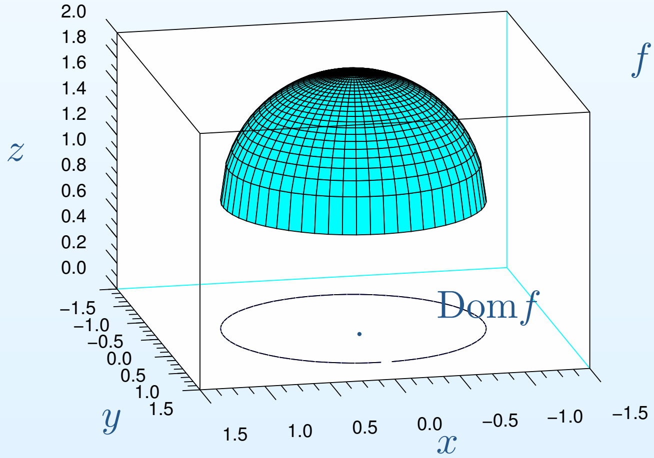
Intégrales multiples

Intégrales multiples : introduction

On veut étendre le calcul d'intégrales à des fonctions de plusieurs variables, c'est-à-dire dont le domaine de définition est inclus dans $\mathbb{R}^d$ où $d = 2, 3, \ldots$ et le graphe dans $\mathbb{R}^{d+1}$.

Exemple : $f(x, y) = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ est définie et continue pour tout $(x, y) \in \mathrm{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Problème : Comment définir et calculer $\int_{\mathrm{Dom} f} f(x, y)\, dxdy$?



Intégrales multiples : introduction

• L'intégrale d'une fonction positive $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est l'*aire* compris entre le graphe $(x, f(x)) \subset \mathbb{R}^2$ et l'axe des abscisses $\mathbb{R}$.

• L'intégrale d'une fonction positive $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ est le *volume* entre le graphe $(x, y, f(x, y)) \subset \mathbb{R}^3$ et le plan $\mathbb{R}^2$.

• Soit $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$,
alors le graphe $(x_1, \ldots, x_d, f(x_1, \ldots, x_d)) \subset \mathbb{R}^{d+1}$:
on doit donc *mesurer* des domaines dans $\mathbb{R}^{d+1}$.

Intégrales multiples : mesurer des volumes dans $\mathbb{R}^d$

Définitions.

• On dit qu'une partie $D \subset \mathbb{R}^d$ est **bornée**, si il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que D est inclus dans l'ensemble

$$B_f(O,R) = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,/\, \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2} \leq R \right\} ,$$

la **boule** fermée de centre $O = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d$ et de rayon R.

• Un **pavé fermé** P de $\mathbb{R}^d$ est défini par

$$P = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,/\, a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq d \right\}$$

$$= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] ,$$

où les $a_i, b_i \in \mathbb{R}\,;\, a_i \leq b_i$, pour $i = 1, \ldots, d$.

Intégrales multiples : mesurer des volumes dans $\mathbb{R}^d$

Définitions.

• La **mesure** d'un pavé fermé $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$

est définie par $m(P) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$.

• Une partie $N \subset \mathbb{R}^d$ est **négligeable dans** $\mathbb{R}^d$, si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un nombre fini de pavés fermés P_k $(1 \leq k \leq n)$ de $\mathbb{R}^d$ tels que

$$N \subset \bigcup_{k=1}^{n} P_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} m(P_k) < \varepsilon \,.$$

Note : pour $x \in N$ négligeable, il n'existe aucune boule ouverte de centre x incluse dans N.

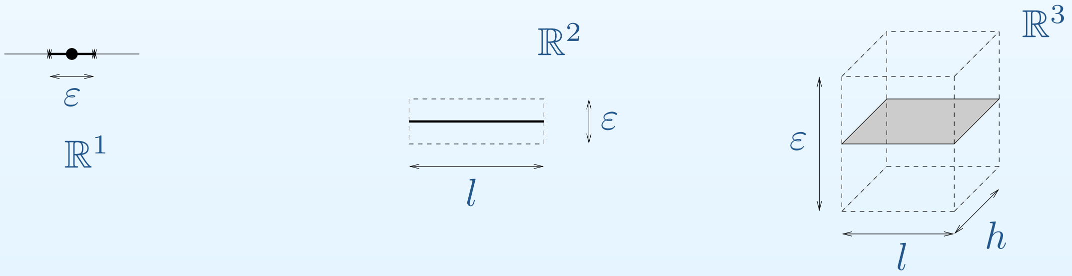
Intégrales multiples : mesurer des volumes dans $\mathbb{R}^d$

Exemples :

• Dans $\mathbb{R}$ les pavés fermés sont les segments $[a, b]$;
tout ensemble fini de points $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est négligeable dans $\mathbb{R}$.

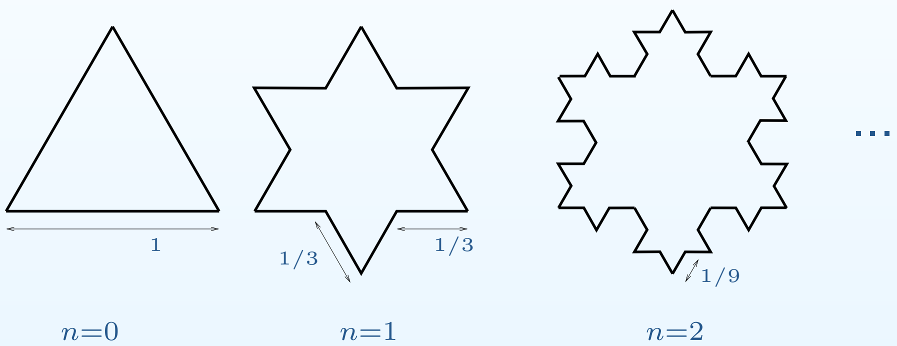
• Dans $\mathbb{R}^2$ les pavés fermés sont les rectangles $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$; toute union finie de segments est négligeable dans $\mathbb{R}^2$,
p. ex. le bord d'un carré.

• Dans $\mathbb{R}^3$ les pavés fermés sont $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$;
toute union finie de rectangles est négligeable dans $\mathbb{R}^3$,
p. ex. le bord d'un cube.



Intégrales multiples : Courbe de von Koch $\mathcal{K}$

L'ensemble de $\mathbb{R}^2$, délimité par la courbe von Koch, est :
borné, de périmètre infini, d'aire finie et n'admet de tangente en aucun point.



La courbe $\mathcal{K}_n$ $(n \geq 0)$ est composée de $s_n = 3 \cdot 4^n$ segments de longueur $l_n = 1/3^n$. Le périmètre vaut $p_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n$ et l'aire vérifie
$a_n = a_{n-1} + s_{n-1} l_n^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ $(n \geq 1)$ avec $a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$$\mathcal{K}_n \to \mathcal{K} : \qquad \lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Intégrales multiples : mesurer des volumes dans $\mathbb{R}^d$

Définitions.

● Le **bord** d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$ est l'ensemble

$$\partial D = \Big\{ x \in \mathbb{R}^d \,/\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :$$
$$B_o(x,\varepsilon) \cap D \neq \emptyset \text{ et } B_o(x,\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^d \setminus D) \neq \emptyset \Big\}$$

où

$$B_o(x,\varepsilon) = \Big\{ y \in \mathbb{R}^d \,/\, \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_d - x_d)^2} < \varepsilon \Big\} ,$$

est la **boule** ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^d$ et de rayon ε.

● On dit qu'un ensemble borné $D \subset \mathbb{R}^d$ est **quarrable** si son bord est négligeable dans $\mathbb{R}^d$.

● L'intérieur du pavé fermé P, défini par $Int(P) = \prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[$

a comme mesure ou volume $m(Int(P)) = m(P)$.

Intégrales multiples : mesurer des volumes dans $\mathbb{R}^d$

Pour $D \in \mathbb{R}^d$ quarrable, la **mesure** $m(D)$ est définie grâce à des recouvrements de D par des pavés de $\mathbb{R}^d$.

Propriétés fondamentales :

1. $m(\emptyset) = 0$;
2. $m(D_1 \cup D_2) = m(D_1) + m(D_2)$ si $D_1 \cap D_2$ est négligeable ;
3. Si $D_1 \subset D_2$, alors $m(D_1) \leq m(D_2)$;

Des ensembles «exotiques», comme la courbe de VON KOCH, ne seront pas considérés. . .

Tous les domaines considérés dans la suite sont quarrables.

On va souvent utiliser des domaines D dont les bords ∂D sont composés de *courbes régulières*.

Ceci est motivé par la proposition suivante.

Intégrales multiples : mesurer des volumes dans $\mathbb{R}^d$

Proposition. *(admise)*
Soit $f : B_o(0,R) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$.
Alors, pour tout pavé fermé $P \subset B_o(0,R)$*, l'ensemble*

$$\left\{(x_1,\dots,x_d, f(x_1,\dots,x_d)) \subset \mathbb{R}^{d+1} \Big/ (x_1,\dots,x_d) \in P\right\}$$

est négligeable dans $\mathbb{R}^{d+1}$.
C-à-d : toute partie bornée du graphe de f *est négligeable dans* $\mathbb{R}^{d+1}$.

Proposition.
Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ *un ensemble borné dont le bord est une réunion finie de graphes de fonctions régulières. Alors* D *est quarrable.*

Exemple : $D(A,r)$, le disque de centre A et de rayon r est quarrable.

Intégrales multiples : définition

Définitions.
• Soit P un pavé fermé de $\mathbb{R}^d$, la **fonction caractéristique** $\mathbb{I}_P$, associée à P est définie par : $\mathbb{I}_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in P \\ 0 & \text{si} \quad x \notin P \end{cases}$.

• Une fonction $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une **fonction en escalier** si et seulement si h s'écrit comme combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques de pavés P_i, $1 \leq i \leq n$, dont les intérieurs sont disjoints :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \ : \ h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{I}_{P_i}(x), \ \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \ .$$

• On définit **l'intégrale d'une fonction en escalier** h par

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, m(P_i) \ .$$

Intégrales multiples : définition

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction *bornée* qui *s'annule en dehors d'un pavé fermé* $Q \in \mathbb{R}^d$.
Soit $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ une **partition** de Q,

i.e. $Q = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ et $Int(P_i) \cap Int(P_j) = \emptyset$, ${}_{1 \leq i < j \leq n}$.

- La **somme de** Riemann associée à f et $\mathcal{P}$ est définie par

$$R(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, m(P_i) \quad \text{où } x_i \text{ est le barycentre de } P_i\,.$$

- Soit $d(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{diam}(P_i)$, alors

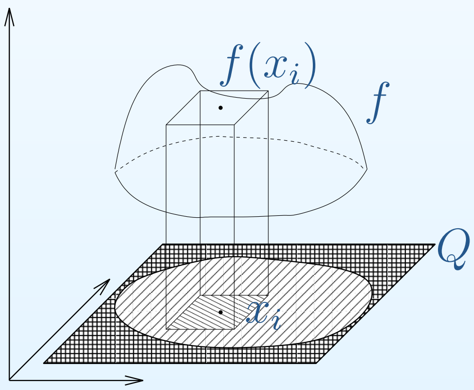
  f est **intégrable** si et seulement si $\lim_{d(\mathcal{P}) \to 0} R(f, \mathcal{P})$ existe.

- On note alors $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = \lim_{d(\mathcal{P}) \to 0} R(f, \mathcal{P})$.

Intégrales multiples : définition

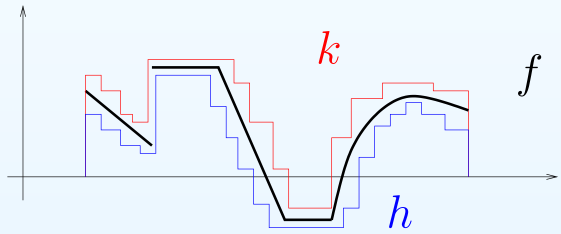
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = \lim_{d(\mathcal{P}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, m(P_i)\,.$$

L'intégrale est définie comme une limite d'intégrales de fonctions en escalier, définies sur des partitions de plus en plus fines.
Si cette limite existe, elle est indépendante des partitions choisies.



Intégrales multiples : caractérisations

- f est intégrable si et seulement si,
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier h et k telles que
$\forall x \in \mathbb{R}^d : h(x) \leq f(x) \leq k(x)$ et
$$\int_{\mathbb{R}^d} k(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\,dx < \varepsilon.$$



- Une fonction définie et bornée sur un domaine quarrable borné et qui est continue en dehors d'un ensemble négligeable, est intégrable.

Intégrales multiples : propriétés

- Soient f, g intégrables, $a, b \in \mathbb{R}$:
$$\int_{\mathbb{R}^d} (af(x) + bg(x))\,dx = a\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx + b\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,dx.$$
- Soit f intégrable vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f(x) \geq 0$, alors
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \geq 0.$$
- Si l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ est quarrable, alors $\mathbb{I}_A$ est intégrable et
$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_A(x)\,dx = m(A).$$
- Si f est intégrable et $A \subset \mathbb{R}^d$ est quarrable, alors $f\,\mathbb{I}_A$ est intégrable et on note $$\int_A f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{I}_A(x)\,dx.$$

Intégrales multiples : propriétés

- Soit f et g intégrables, $A \subset \mathbb{R}^d$ quarrable, avec $f \leq g$, alors
$$\int_A f(x)\,dx \leq \int_A g(x)\,dx.$$
- Soit f intégrable, $A \subset \mathbb{R}^d$ quarrable, et $|f(x)| \leq M$, alors
$$\left|\int_A f(x)\,dx\right| \leq M\,m(A).$$
- Soit f intégrable, A et B des ensembles quarrables avec $A \cap B$ négligeable, alors $\displaystyle\int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx.$
- Soit A quarrable, f, g intégrables et $\{x \in \mathbb{R}^d / f(x) \neq g(x)\}$ négligeable, alors $\displaystyle\int_A f(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx.$

Calcul d'intégrales multiples

Théorème. *(FUBINI)*
On considère $f : \mathbb{R}^{d_1+d_2} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable, $A_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$,$A_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ des ensembles quarrables, et l'on pose

pour tout $x \in A_1$: $F_1(x) = \displaystyle\int_{A_2} f(x,y)\,dy$ *et*

pour tout $y \in A_2$: $F_2(y) = \displaystyle\int_{A_1} f(x,y)\,dx.$

Alors, les fonctions F_1 et F_2 sont définies, intégrables et
$$\int_{A_1\times A_2} f(z)\,dz = \int_{A_1} F_1(x)\,dx = \int_{A_2} F_2(y)\,dy$$

On note $\displaystyle\int_{A_1} F_1(x)\,dx = \int_{A_1}\left(\int_{A_2} f(x,y)\,dy\right)\,dx.$

Calcul d'intégrales multiples

- On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \begin{cases} y^{-2} & \text{si } 0 < x < y < 1 \\ -x^{-2} & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx \right) dy = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx = -1$.

La fonction f n'est pas intégrable !

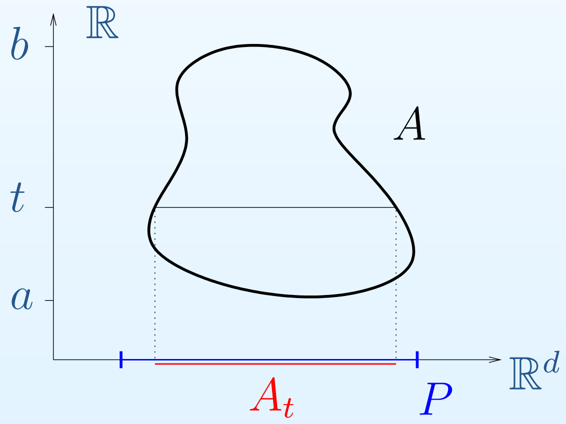
- Soient $A \subset \mathbb{R}^{d_1}$ et $B \subset \mathbb{R}^{d_2}$ quarrables,
$f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ intégrables.
On pose, pour $z = (x, y)$, $h(z) = f(x)g(y)$,
alors la fonction $h : \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ est intégrable et

$$\int_{A \times B} h(z)\, dz = \left(\int_A f(x)\, dx \right) \left(\int_B g(y)\, dy \right).$$

Calcul d'intégrales multiples

Proposition. *(Principe de* CAVALIERI*)*
Soit $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ quarrable tel que $A \subset P \times [a, b]$,
où P est un pavé fermé de $\mathbb{R}^d$ et $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
Pour $t \in [a, b]$, on pose $A_t = \{x \in \mathbb{R}^d \,/\, (x, t) \in A\} \subset \mathbb{R}^d$.
On pose $\alpha(t) = m_d(A_t)$ la mesure dans $\mathbb{R}^d$ du quarrable A_t, et on a

$$m_{d+1}(A) = \int_a^b \alpha(t)\, dt.$$



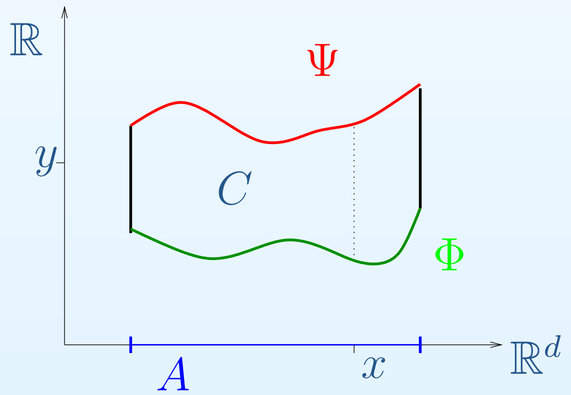
Calcul d'intégrales multiples

Proposition.
Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ *quarrable,* Φ, $\Psi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *continues et vérifiant* $\Phi \leq \Psi$, *alors l'ensemble*

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} \,/\, x \in A \ \text{ et } \ \Phi(x) \leq y \leq \Psi(x)\right\}$$

est quarrable. Si $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue, alors,*

$$\int_C f(z)\, dz = \int_A \left(\int_{\Phi(x)}^{\Psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

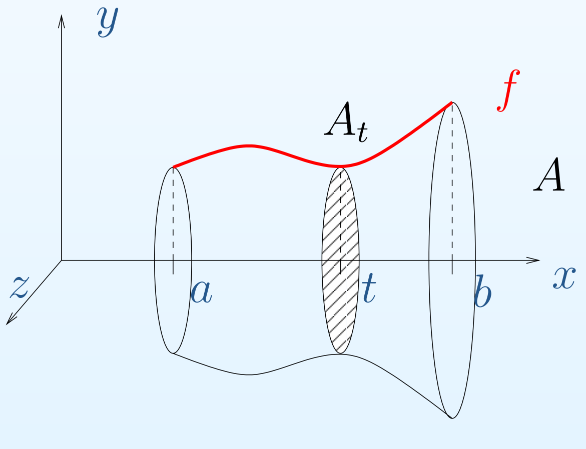


Calcul d'intégrales multiples

Volume d'un corps de révolution dans $\mathbb{R}^3$

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ positive et continue, appelons A le corps engendré par la rotation du graphe de f autour de l'axe des abscisses.

On a $\alpha(t) = aire(A_t) = \pi\, f(t)^2$, d'où $\quad vol(A) = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)^2\, dx$.



Calcul d'intégrales multiples

Soit f intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et $P = \prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^d$, alors

$$\int_P f(x)\, dx = \int_{a_d}^{b_d} \left(\int_{a_{d-1}}^{b_{d-1}} \left(\cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, dx_1 \right) \cdots \right) dx_{d-1} \right) dx_d \,.$$

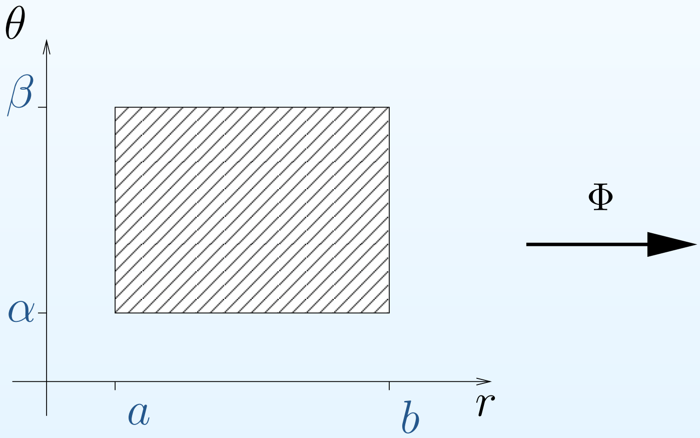
Le théorème de Fubini permet de ramener le calcul d'une intégrale multiple sur un pavé de $\mathbb{R}^d$ à une succession de d intégrales simples.

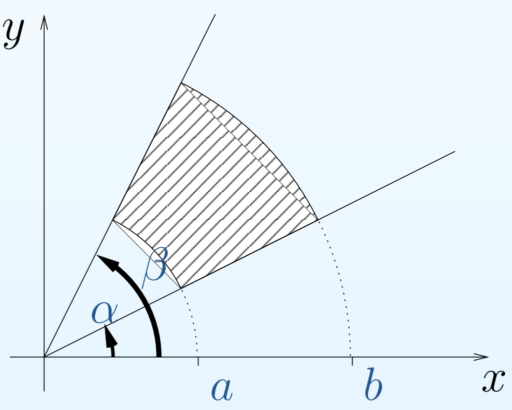
Si le domaine d'intégration n'est pas *simple* (p.ex. un pavé) on peut souvent le transformer grâce à un changement de variables.

Changement de variables dans les intégrales multiples

Coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& r\cos(\theta) \\ y &=& r\sin(\theta) \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} r &=& \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &=& \arctan(y/x) \end{array}\right.$$





Aire$=(b-a)(\beta-\alpha)$

Aire$=\dfrac{b+a}{2}\,(b-a)(\beta-\alpha)$.

Changement de variables dans les intégrales multiples

Il faut donc tenir compte de l'influence d'un changement de variables sur la mesure des volumes !

Comme dans le cas 1D, la correction est donnée par les variations d'ordre 1 du changement de variables $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

De façon précise, c'est la

valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne

qui intervient dans la formule du changement de variables pour les intégrales multiples.

Changement de variables dans les intégrales multiples

Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto & y = \Phi(x) \end{array}$.

Or $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $y = \Phi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_d(x)) \in \mathbb{R}^d$, où $\Phi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $y_i = \Phi_i(x_1, \ldots, x_d)$.

La **matrice jacobienne** de Φ, au point $a \in \mathbb{R}^d$, est définie par

$$J(\Phi)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_d}(a) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_d}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_d}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_d}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix}$$

Changement de variables dans les intégrales multiples

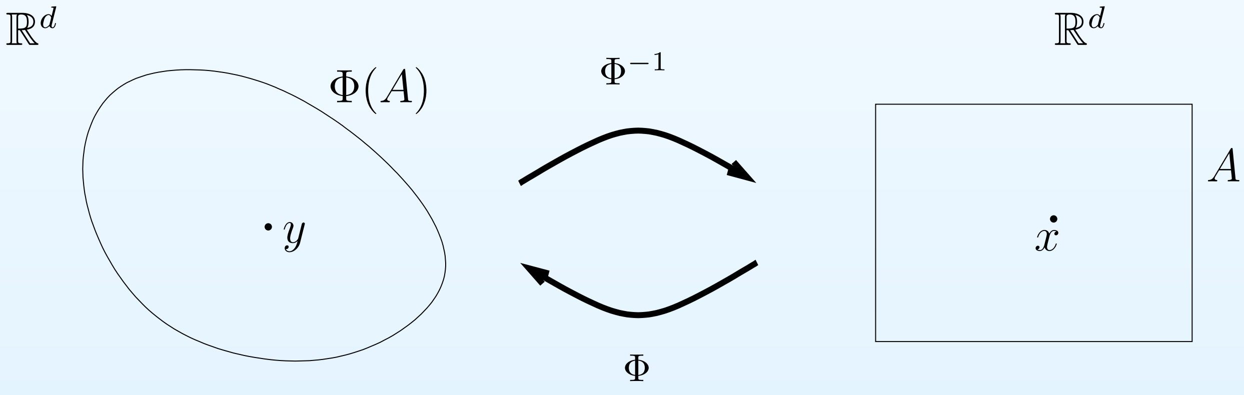
Le **jacobien** de Φ, au point $a \in \mathbb{R}^d$, est défini par

$$det(J(\Phi))(a) = \frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_d)}{D(x_1, \ldots, x_d)}(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_d}(a) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_d}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_d}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_d}{\partial x_d}(a) \end{vmatrix}$$

Changement de variables dans les intégrales multiples

Théorème. *Soit A un pavé fermé, borné quarrable de $\mathbb{R}^d$ et soit $\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$. On suppose que Φ est bijective sur A, que les dérivées partielles de Φ existent et sont continues et que le jacobien ne s'annule pas sur A.*
Alors, $\Phi(A)$ est quarrable et si $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\Phi(A)$ alors

$$\int_{\Phi(A)} f(y)\, dy = \int_A f(\Phi(x)) \left| \frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_d)}{D(x_1, \ldots, x_d)}(x) \right| dx.$$



Changement de variables dans les intégrales multiples

• Transformation affine, $\Phi(x) = Mx + b$,
où M est une matrice carrée inversible (d, d) et $b \in \mathbb{R}^d$.

On a $\Phi_i(x) = \sum_{k=1}^{d} M_{ik} x_k + b_i$ et

$$m(\Phi(A)) = \int_{\Phi(A)} 1\, dy = \int_A 1\, |det(M)|\, dx = |det(M)|\, m(A).$$

• Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$:
$(x, y) = \Phi(r, \theta) = (\Phi_1(r, \theta), \Phi_2(r, \theta)) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(r, \theta)}(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r.$$

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, Φ est bijective, ses dérivées partielles sont continues et le jacobien est non nul.

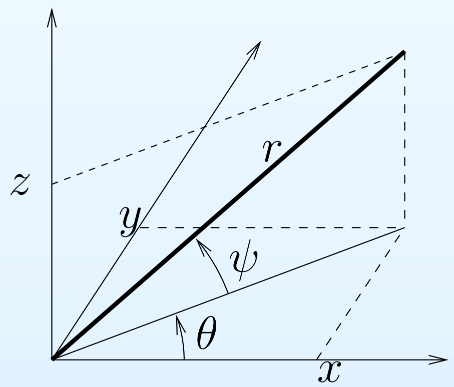
Changement de variables dans les intégrales multiples

Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$: $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \psi)$ avec

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & \Phi_1(r, \theta, \psi) & = & r\cos(\psi)\cos(\theta) \\ y & = & \Phi_2(r, \theta, \psi) & = & r\cos(\psi)\sin(\theta) \\ z & = & \Phi_3(r, \theta, \psi) & = & r\sin(\psi) \end{array} \right.$$

où $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\psi \in [-\pi/2, +\pi/2]$

et $$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{D(r, \theta, \psi)}(r, \theta, \psi) = r^2\cos(\psi)\ .$$



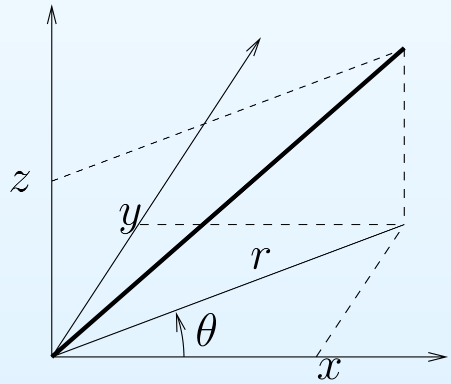
Changement de variables dans les intégrales multiples

Coordonnées cylindriques dans $\mathbb{R}^3$: $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, z)$ avec

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & \Phi_1(r,\theta,z) & = & r\cos(\theta) \\ y & = & \Phi_2(r,\theta,z) & = & r\sin(\theta) \\ z & = & \Phi_3(r,\theta,z) & = & z \end{array}\right.$$

où $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{R}$.

et $$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{D(r, \theta, \psi)}(r, \theta, \psi) = r \ .$$



Changement de variables dans les intégrales multiples

Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^d$: $(x_1, \dots, x_d) = \Phi(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$ où

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & = & r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) & \cdots \quad \cos(\theta_{d_3})\cos(\theta_{d-2})\cos(\theta_{d-1}) \\ x_2 & = & r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) & \cdots \quad \cos(\theta_{d_3})\cos(\theta_{d-2})\sin(\theta_{d-1}) \\ x_3 & = & r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) & \cdots \quad \cos(\theta_{d_3})\sin(\theta_{d-2}) \\ & \vdots & & \\ x_{d-1} & = & r\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) & \\ x_d & = & r\sin(\theta_1) & \end{array}\right.$$

où $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta_{d-1} \in [0, 2\pi]$ et $\theta_p \in [-\pi/2, +\pi/2]$, $1 \le p \le d-2$,

et $$\frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_d)}{D(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})}(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$$
$$= r^{d-1}\cos^{d-2}(\theta_1)\cos^{d-3}(\theta_2)\cdots\cos(\theta_{d-2}) \ .$$

Intégrales multiples impropres

Comme pour le cas de fonctions à une variable, on veut étendre le calcul d'intégrales multiples à des *domaines non bornés* dans $\mathbb{R}^d$ et à des fonctions ayant une *singularité*, c'est-à-dire non bornées au voisinage d'un point du domaine d'intégration.

Remarquons tout de suite que la convergence des intégrales multiples ne peut être que **absolue** :

f est intégrable sur $A \subset \mathbb{R}^d$
si et seulement si
$|f|$ est intégrable sur $A \subset \mathbb{R}^d$.

Intégrales multiples impropres

Démarche pratique pour intégrales doubles

• Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, on dit qu'une suite d'ensembles fermés bornés $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ épuise A, si la suite est croissante, $K_n \subset K_{n+1}$, et si pour tout fermé borné $K \subset A$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_N$.

Exemple : $A = (\mathbb{R}_+)^2$ alors $K_n = [0, n]^2$ et
$L_n = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \,/\, 1/n \leq x^2 + y^2 \leq n\}$ sont des suites de fermés bornés qui épuisent A.

• Soit f une fonction localement intégrable sur A, alors l'intégrale de f sur A est convergente si et seulement si il existe $g : A \to \mathbb{R}_+$ dont l'intégrale converge sur A et telle que $|f| \leq g$ sur A.

Intégrales multiples impropres

Démarche pratique pour intégrales doubles (suite)

- L'intégrale sur A d'une fonction positive g est convergente si et seulement si la suite positive $\alpha_n = \displaystyle\int_{K_n} g(x)\,dx$ est majorée.

- L'intégrale de f sur A est convergente si et seulement si l'intégrale de $|f|$ sur A est convergente.

On a alors $\displaystyle\int_A f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{K_n} f(x)\,dx$.

Le résultat étant indépendant du choix de la suite K_n.