Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

CORRIGÉ DE L'EXAMEN
LICENCE 2ème année
Environnement de calcul scientifique et modélisation

Année 2006 - 2007

23 mai 2007

Questions de cours :

QC1.1

• L'algorithme de HORNER est utilisé et appelé par la fonction `horner()`.
• On détermine les coefficients de Q et $P(\alpha)$ en identifiant :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (x-\alpha) \sum_{i=0}^{n-1} q_i x^i + P(\alpha)$$

ce qui donne l'algorithme $\left\{ \begin{array}{lcl} q_{n-1} & = & a_n \\ q_{i-1}(x) & = & \alpha q_i + a_i \ , \ i = n-1, \dots, 0; \end{array} \right.$ où $q_{-1} = P(\alpha)$.
• L'algorithme de HORNER, donne la valeur de $P(\alpha)$ en n multiplications.
Par contre, pour évaluer P au point $x = \alpha$ de façon naïve il faut : n additions, n multiplications et $n-1$ appels à la fonction puissance $x \mapsto x^k$, $(2 \leq k \leq n)$ avec, à chaque fois $k-1$ multiplications, ce qui fait $O(n^2/2)$ multiplications. (En calculant x^k à partir de x^{k-1} on réduit l'évaluation à $O(2n)$ multiplications)

QC1.2

En dérivant la relation $P(x) = Q(x)(x-\alpha) + P(\alpha)$ on obtient :
$P'(x) = Q'(x)(x-\alpha) + Q(x)$ et $P'(\alpha) = Q(\alpha)$
Il suffit donc de réappliquer la méthode de HORNER à Q pour obtenir $P'(\alpha)$.

QC2.1 D'après le cours, ils connaissent au moins deux méthodes :
• *Formules de Cramer*
On note A_i la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la i-ème colonne par b, alors pour $i = 1, \dots, n \ : \ x_i = \det(A_i)/\det(A)$.
On doit calculer $n+1$ déterminants ce qui fait donc $(n+1)O(n!) = O((n+1)!)$ opérations.
• *Décomposition LU + systèmes triangulaires*
On décompose A en un produit LU de matrices triangulaires inférieures et supérieures (à des permutations près) ; ensuite il faut résoudre deux systèmes triangulaires $Ly = b$ et $Ux = y$.

QC2.2 Les formules de Cramer ont une utilité théorique en permettant d'exprimer le solution de façon concise ; pour des systèmes particuliers elles peuvent permettre de trouver la solution ; mais de façon générale, elles sont inutilisables en pratique à partir de $n = 15$ (approx.).
Le coût de la décomposition LU est $O(\frac{2}{3}n^3)$ et la résolution des deux systèmes triangulaires $O(n^2)$, on arrive donc à un nombre d'opérations beaucoup moins élevé que pour la méthode de Cramer. Par ailleurs, changer de second membre b ne change fait que refaire la résolution de systèmes triangulaires, peu coûteuse par rapport à la décomposition.

Exercice 1
Vu en TP : `m=length(x)=n+1; V = ( x*ones(1,m) ).^( ones(m,1)*[0:m-1] )`
Pour la version “boucle” il y a le choix !

Exercice 2
1.

```
function I1 = int_1(x,f)
n=length(x)
I1=0;
for i=1:n-1
 I1 = I1 + (x(i+1)-x(i))*f((x(i)+x(i+1))/2)
end
endfunction
```

2.

```
function I2 = int_1(x,f)
n=length(x)
I2= sum( (x(2:n)-x(1:n-1)).*( f(x(1:n-1))+f(x(2:n))) )/2
endfunction
```

3. La méthode 1 (point milieu) calcule l'aire du rectangle de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $f((x_i + x_{i+1})/2)$, on approxime la courbe de f par une constante.
La méthode 2 (méthode des trapèzes) calcule l'aire du rectangle de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $(f(x_i) + f(x_{i+1})/2)$, ce qui peut s'interpréter comme l'aire du trapèze formé par les points x_i, x_{i+1} ,$f(x_{i+1})$ et $f(x_i)$, on approxime la courbe de f par une droite affine, pas néc. horizontale.
En TP, on a “vu” que les méthodes sont d'ordre 1 (*i.e.* exactes sur les fonctions affines).

Exercice 3
1. On a $(k-1)$ mult. pour chaque l_{kk} et pour chaque l_{ik} :
$$\sum_{k=1}^{n}((k-1) + \sum_{i=k+1}^{n}(k+1)) = \sum_{k=1}^{n}(k+1) + (k+1)(n-k) = \sum_{k=1}^{n}(k+1+nk+n-k-k^2)$$
$$= n + n^2(n+1)/2 + n^2 - n(n+1)/2 - n(n+1)(2n+1)/6 = O(\frac{1}{3}n^3).$$
2.

```
function [L] =  decomp(A)
n = size(A,1)
if( n <> size(A,2)) then
 error("matrice non carrée")
end
L=zeros(A)
for k=1:n
  L(k,k)=sqrt( A(k,k)-L(k,1:k-1)*L(k,1:k-1)' )

  L(k+1:n,k)=( A(k+1:n,k)-L(k+1:n,1:k-1)*L(k,1:k-1)' )/L(k,k)
end
endfunction
```

3.
$det(A) = det(L)det(L^t) = det(L)^2 = \prod_{i=1}^{n} l_{kk}^2$
La décomposition LL^t et cette évaluation nécessite donc bcp moins d'opérations que l'évaluation directe du déterminant de A.