Université Paris–Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

PARIS DESCARTES

Licence 2^e année, 2006–2007

Environnement de calcul scientifique et modélisation

Examen du 23 mai 2007

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document ainsi que l'utilisation de tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

QC1 Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ un polynôme de degré n et de coefficients réels a_0, a_1, …, a_n.

1. Quel algorithme utilise `Scilab` pour évaluer P en un réel α ?

   Écrire cet l'algorithme en partant de $P(x) = (x-\alpha)Q(x) + P(\alpha)$ où $Q = \sum_{i=0}^{n-1} q_i x^i$.

   Donner le nombre d'opérations élémentaires et comparer au nombre d'opérations utilisant une évaluation directe du polynôme.
2. Donner la méthode présentée en cours pour calculer $P'(\alpha)$.

QC2 On considère un système linéaire $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$ est une matrice inversible, b et x étant dans $\mathbb{R}^n$.

1. Décrire deux méthodes de résolution de ce système.
   (Sans rentrer dans les détails, on expliquera clairement les différentes étapes et les calculs nécessaires)
2. Discuter les avantages et désavantages de chacune de ces méthodes.

Exercice 1. Soit n un entier, $x = (x_i)_{i=1,\dots,n+1}$ un vecteur colonne de réels.
On désire construire la matrice suivante :

$$V = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_i^0 & x_i^1 & \cdots & x_i^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n+1}^0 & x_{n+1}^1 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Donner deux façons différentes de construire V en `Scilab`, l'une <u>avec</u> et l'autre <u>sans</u> boucle.

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, où $a < b$ sont des réels. On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Pour cela, on considère une subdivision de l'intervalle $[a, b]$: $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{N+1} = b$.
On suppose que la fonction f est définie grâce à `deff(‘‘y=f(x)’’,’’y=...’’)`.

1. En utilisant la formule $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt \approx (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$, $1 \leq i \leq N$,
   écrire une fonction `Scilab` : `function [I1]=int_1(x,f)`
   qui calcule $I(f)$ à partir du vecteur colonne `x` de taille $N + 1$ et de la fonction `f`.

2. En utilisant la formule $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt \approx (x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$, $1 \leq i \leq N$,
   écrire une fonction `Scilab` :`function [I2]=int_2(x,f)` qui calcule $I(f)$,
   sans utiliser de boucle, à partir du vecteur colonne `x` de taille $N+1$ et de la fonction `f`.

3. Décrire, brièvement mais de façon précise, les différences entre les deux méthodes proposées ci-dessus. Dire en particulier laquelle est la “meilleure” (en donnant un sens précis à “meilleure”).

Exercice 3. Soit A une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives, on admet qu'elle se décompose alors comme suit $A = L \cdot L^t$,
la matrice L étant triangulaire inférieure. L'algorithme suivant permet de déterminer L :

$L = 0_n$
pour $k = 1$ **à** n

$$l_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

pour $i = k + 1$ **à** n

$$l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}\right)$$

1. Déterminer le nombre de multiplications nécessaires pour calculer L.
   (On rappelle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$)

2. Écrire une fonction `Scilab` : `[L]=decomp(A)` qui calcule L en utilisant une seule boucle.

3. Comment calculer le déterminant de A à partir de L ? Commentaires ?