Université Paris–Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Licence 2e année, 2008–2009

Environnement de calcul scientifique et modélisation

Examen du 19 mai 2009

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document ainsi que l'utilisation de tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours. Applications.

1. Soit A une matrice carrée inversible. Expliquer comment, à partir de la décomposition `A=L*U`, on résout le système linéaire $Ax = b$.
2. Soit $\frac{1}{1-x^2}$. Citer trois points dont il faut tenir compte afin de représenter f convenablement sur l'intervalle $[-2, 2]$.
3. Expliquer les différences entre un fichier à extension “`.sci`” et un fichier à extension “`.sce`”.

Exercice 1.
On suppose que l'entier $n \geq 2$ est donné et l'on veut définir la matrice A de dimensions $[n, n]$ obtenue en écrivant les entiers de 1 à n^2 selon un parcours qui “serpente” dans la matrice illustré par le schéma ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2n & 2n-1 & \cdots & n+2 & n+1 \\ 2n+1 & 2n+2 & \cdots & 3n-1 & 3n \\ \vdots & \vdots & & \cdots & 3n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Pour $n \geq 2$ quelconque, proposer une définition `Scilab` de A sans utiliser de boucle.

Exercice 2.

On définit $A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 \\ 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$ et `v=[2,4]`.

Donner une ligne de commande `Scilab` simple pour définir A.
Qu'affichent les commandes suivantes ?

(1) `A(v,v)` (2) `A(v,v-1)` (3) `A(v($:-1:1),v($:-1:1))`

(4) `A(v,:)=[]` (5) `A(v,v(2))=v'` (6) `A(v,v)=v'*v`

Note : avant chacune de ces commandes, la matrice A est supposée redéfinie à sa valeur initiale.

Exercice 3.
Qu'affichent chacune des lignes Scilab suivantes ?

1) `x=[1,2,1,1]; y=[1,1,2,1]; plot2d(x',y')`

2) `x=linspace(-%pi,%pi,50)'; y=[]; for i=-1:1, y=[y,sin(x.*i)]; end; plot2d([x,x,x],y)`

3) `p=poly([-1,0, 1],"x","c"); roots(2*p)`

4) `v=(-1)^[0:2]; A = diag([10^2,10^3,10^4]) * [v;v;v]'`

5) `p=poly([-4,0, 1],"x","c"); q=poly( (1)./roots(p),"x")`

6) `x=[-1;0;1]; y=[0;1;0]; plot2d([x,x],[y,-y],style=[1,1])`

7) `v=[5:-1:0]; x=sum(v.*10^(-[1:length(v)]))`

Exercice 4.
Soit A une matrice de taille $[n,n]$, symétrique et inversible. On admet qu'elle se décompose alors comme suit $A = L * D * L'$, la matrice L étant triangulaire inférieure de taille $[n,n]$ avec des "1" sur la diagonale. D est une matrice diagonale de taille $[n,n]$. L'algorithme suivant permet de déterminer L et D, où d est la diagonale de D et v est un vecteur auxiliaire. On admet qu'il n'y pas de division par zéro.

`L=eye(n,n); d=zeros(n,1), v=zeros(n,1)`
pour $j = 1$ **à** n
  pour $i = 1$ **à** $j-1$
    $v(i) = L(j,i) * d(i)$
  fin
  $$v(j) = A(j,j) - \sum_{i=1}^{j-1} L(j,i) * v(i)$$
  $d(j) = v(j)$
  pour $i = j+1$ **à** n
    $$L(i,j) = \Big(A(i,j) - \sum_{k=1}^{j-1} L(j+1:n,k) * v(k)\Big)/v(j)$$
  fin
fin
`D=diag(d)`

1. Comment calculer le déterminant de A à partir de cette décomposition ?
2. Comment peut on résoudre le système linéaire $Ax = b$ à partir de la décomposition $L * D * L'$?
3. Écrire une fonction `Scilab` : `[L,D]=decomp(A)` qui calcule L et D en utilisant une seule boucle `for` sur `j`.