UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Corrigé de l'examen partiel du 22 mars 2010
L2 : Environnement de calcul scientifique et modélisation

Rappel : afin d'obtenir le maximum de points, il est nécessaire du justifier de façon claire et concise les réponses données.

Questions de cours :

1. Les dimensions de A, v et v' étant respectivement $[n, n]$, $[n, 1]$ et $[1, n]$, la multiplication matricielle est définie et le résultat $A * v * v'$ est une matrice de taille $[n, n]$

Afin de simplifier la rédaction de la suite, il est plus facile de rappeler le nombre de multiplications de réels nécessaires pour multiplier deux matrices A et B de tailles respectives $[n, m]$ et $[m, p]$. La matrice $A * B$ est de taille $[n, p]$ et contient donc np éléments, calculés grâce à $(A * B)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (A)_{ik}(B)_{kj}$.

Pour chacun de ces éléments, on doit effectuer m multiplications. En tout, le produit matriciel `A*B` nécessite donc exactement nmp multiplications de nombres réels.

2. Le produit $(A * y)$ nécessite $n \cdot n \cdot 1 = n^2$ multiplications. Comme $(A * v)$ est de taille $[n, 1]$, pour le produit $(A * v) * v'$ on doit effectuer $n \cdot 1 \cdot n = n^2$ multiplications.
En tout, le calcul de $(A * v) * v'$ nécessite donc $n^2 + n^2 = 2n^2$ multiplications.
3. De même, $(v * v')$ est de taille $[n, n]$ et son calcul nécessite $n \cdot 1 \cdot n = n^2$ multiplications. Pour calculer $A * (v * v')$ on a besoin de $n \cdot n \cdot n = n^3$ multiplications.
En tout, il faut $n^2 + n^3$ multiplications pour déterminer $A * (v * v')$.
4. Pour $n = 10^6$, $(A*v)*v'$ nécessite $2 \cdot 10^{12}$ multiplications, contre $\cdot 10^{12} + 10^{18}$ pour $A*(v*v')$.
En conclusion, pour calculer $A*v*v'$, il est $(1 + 10^{12}$ fois !) plus rapide de faire les calculs dans l'ordre donné par les parenthèses en **2** que celui donné en **3**.

Exercice 1

Les lignes 1 et 2 ne produisent pas d'affichage mais définissent les vecteurs
`v=[ 1, 3, 5, 7, 9, 11]` et `w=[2, 4, 6, 8, 10, 12]`.
Les lignes 3 et 4 affichent les matrices B et C, chacune de taille `[2,3]`, obtenus en utilisant `v`, resp. `w`, et en remplissant colonne par colonne : $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$.
La ligne 5 construit par bloc la matrice A qui n'est affiché que dans la ligne 6 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la ligne 7, on enlève les 3 dernières lignes de A qui devient $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$
La ligne 8 affiche A comme une matrice $[1, 12]$, c.-à-d., un vecteur ligne. Les éléments de A sont lus colonne par colonne, d'où : `[1, 3, 5, 7, 9, 11, 2, 4,  6, 8, 10, 12]`

Exercice 2

1. Le polynôme P s'écrit $P(X) = a_3(X+2)(X-1)(X-2)$,
le coefficient a_3 est donné par la relation $P(0) = 2 = a_3(2)(-1)(-2) = 4a_3$.
P s'écrit donc $P(X) = \frac{1}{2}(X+2)(X-1)(X-2) = \frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{2}X^2 - 2X + 2$.
C'est l'unique polynôme ayant comme racines -2, 1 et 2 et vérifiant $P(0) = 2$!
En Scilab, il suffit de faire `P = poly([-2,1,2],"X")*(0.5)`

2. D'après la question 1, `c = coeff(P)` affiche `c =   2.   - 2.   - 0.5     0.5`
(attention à l'ordre) et `r = roots(P)` donne `r = 1 2 -2`
La ligne 3 affichera un polynôme de racines -2, 1 et 2 où $a_3 = 1$!
D'où `ans =` $4 - 4X - X^2 + X^3$.
La ligne 4 construit le polynôme de variable "X", dont les coefficients sont donnés par le vecteur `c([$:-1:1])`, c.-à-d. où l'on inverse la liste des coefficients.
D'où $0.5 - 0.5X - 2X^2 + 2X^3$.
C'est bien le polynôme obtenu à partir de P en inversant les coefficients. Le même polynôme est affiché par la ligne 5.
En effet, `prod(r)` calcule le produit des racines, $(-2)(+1)(+2) = -4$
tandis que `poly( (1)./r, "X")` donne le polynôme dont les racines sont $\frac{1}{-2}$ et $a_3 = 1$:
$\frac{1}{1}$ et $\frac{1}{2}$:
$(X + \frac{1}{2})(X-1)(X-\frac{1}{2}) = 0.25 - 0.25X - X^2 + X^3$.
En multipliant par `-c($)=-0.5`, l'on obtient $0.5 - 0.5X - 2X^2 + 2X^3$.

Exercice 3

On définit au préalable les deux vecteurs ligne `x=[1,3]` et `y=[2,4]`.

1. On obtient la matrice A en remplissant un tableau de taille $[4,4]$ colonne par colonne et en le transposant, d'où `A=matrix([1:16],4,4)'`.

2. `A(:,x)` affiche toutes les lignes des colonnes 1 et 3 de A, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{pmatrix}$.

3. Comme $y(x(1)) = y(1) = 2$, on affiche la deuxième colonne des lignes 2 et 4 : $\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$.

4. On copie A dans B et on remplace les éléments des 1ère et 3è lignes, 2è et 4è colonnes par la matrice $[x', y'] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, d'où : $B = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & 3 & \mathbf{2} \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & \mathbf{3} & 11 & \mathbf{4} \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

5. On copie A dans C et on remplace les éléments des 1ère et 3è lignes, 2è et 4è colonnes par la matrice `ones([x;y])` qui est une matrice $[2,2]$ ne contenant que des "1", d'où $C = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & 3 & \mathbf{1} \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & \mathbf{1} & 11 & \mathbf{1} \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

6. `diag(A)` extrait les éléments de la diagonale de A et affiche $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

1. On a $A = (a_{ij})$, avec $a_{ij} = i/j = v(i) * w(j)$ où $v(i) = i$ sont les coordonnées d'un vecteur colonne v et $w(j) = 1/j$ sont les coordonnées d'un vecteur ligne w.
On peut définir v par `v=[1:n]'` et w par `w=(1)./[1:n]`
la matrice A s'obtient alors grâce à `A=v * w`.

Autres possibilité : `A = ([1:n]'*ones(1,n)) ./ (ones(n,1)*[1:n])`

2. On constate d'abord que $b_{ij} = a_{ij} = i/j$ si $i + j$ est pair, tandis que $b_{ij} = j/i = a_{ji} = 1/a_{ij}$ si $i + j$ est impair.
En Scilab, on peut donc définir `I = (-1).^([1:n]') * (-1).^([1:n])`
ceci définit une matrice "en échiquier" telle que $I_{ij} = (-1)^{i+j}$.
On obtient le résultat par `B = (I==1).*A + (I==-1).*A'`
noter que pour cet exemple `A' = (1)./A`.

On peut aussi définir `crible = (I+1)/2` et ensuite `B = crible.*A + (1-crible).*(1./A)`

3. La matrice $C = \begin{pmatrix} 1^1 & 2^1 & \cdots & (n-1)^1 & n^1 \\ 1^2 & 2^2 & \cdots & (n-1)^2 & n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1^n & 2^n & \cdots & (n-1)^n & n^n \end{pmatrix}$ peut être interprétée comme la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & (n-1) & n \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1) & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1) & n \end{pmatrix}$ prise, élément par élément, à la puissance de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$.
On obtient le résultat souhaité par `C = (ones(n,1)*[1:n]).^([1:n]'*ones(1,n))`