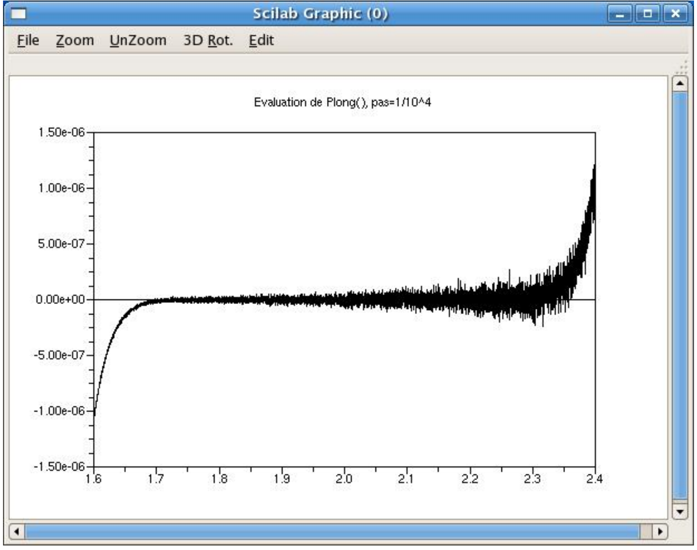
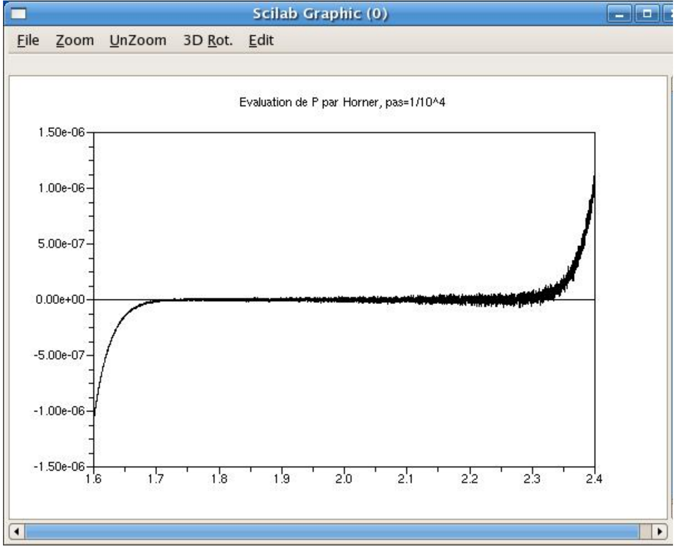
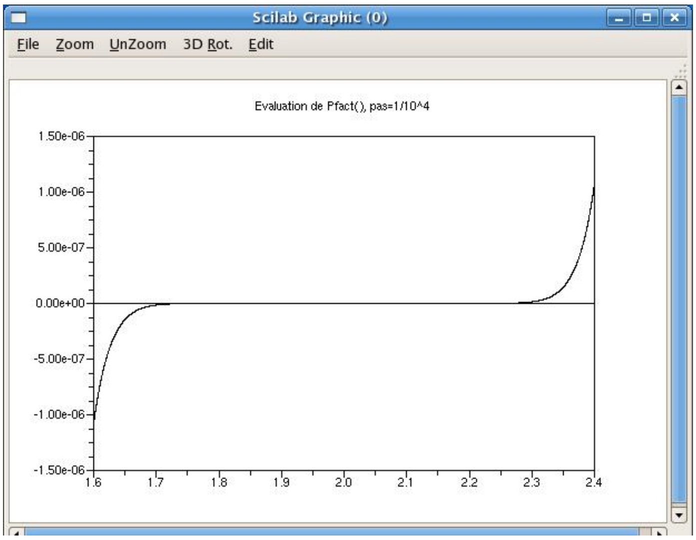






Instabilité des racines d'un polynôme

On se propose de déterminer les racines des deux polynômes

$$P(x) = \prod_{k=1}^{20}(x-k) \qquad PW(x) = P(x) - 2^{-23}x^{19} \; ,$$

Le polynôme P est *perturbé* dans le coefficient de x^{19} de la quantité $2^{-23} \sim 10^{-7}$.

```
--> format("v",15)
--> P = poly([1:20],"x");
--> x = poly(0,"x")
--> PW = P - 2^(-23)*x^(19)
```

Les racines de P sont 1, 2, . . . , 19, 20 ,
que l'on trouve à des erreurs numériques près :

```
--> roots(P)
 ans  =
    1.                          10.99244319837
    1.999999999997              12.01615920929
    2.999999997859              12.9741692878б
    4.000000038721              14.03298954593
    4.999999607972              14.96803094331
    6.000003395277              16.0229041939
    6.999973668643              16.9875823906
    8.000164326043              18.00446956108
    8.999222272872              18.99898756005
    10.00279550813              20.0001052941
```

On a 20 racines réelles.

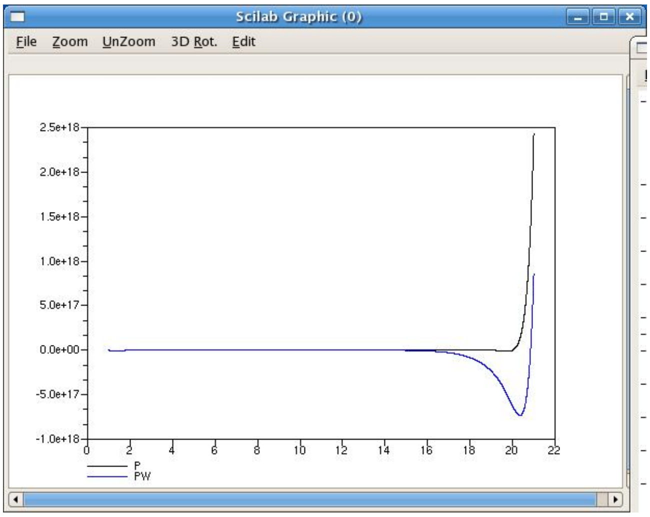
Les racines de PW obtenus par **Scilab** sont :

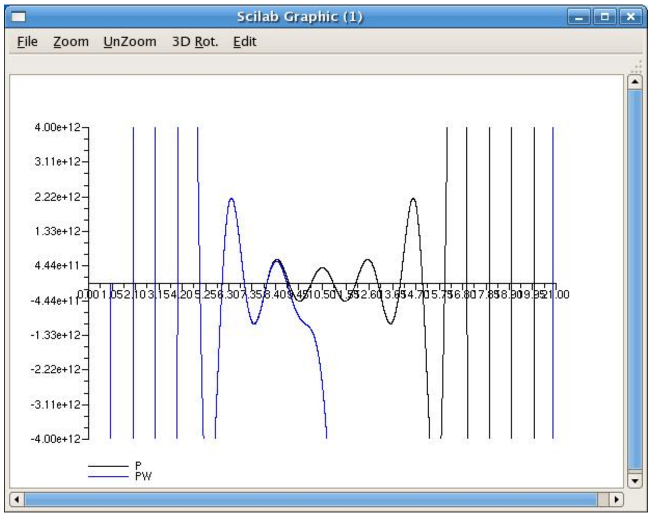
```
--> roots(PW)
 ans  =
    1.                    10.09525370235 + 0.644163071814i
    1.999999999997        10.09525370235 - 0.644163071814i
    2.999999997859        11.79375024155 + 1.652496188222i
    4.000000038867        11.79375024155 - 1.652496188222i
    4.999999543088        13.9924099238  + 2.518867648376i
    6.000010147142        13.9924099238  - 2.518867648376i
    6.99967351886         16.73075832629 + 2.812637391862i
    8.007415740622        16.73075832629 - 2.812637391862i
    8.916743386531        19.50244942083 + 1.940335706565i
    20.84691451661        19.50244942083 - 1.940335706565i
```

On a 10 racines réelles et 10 racines complexes conjuguées !

Instabilité des racines d'un polynôme

Conclusion : les polynômes P et PW ne diffèrent que du terme $2^{-23}\,x^{19}$ et pourtant l'ensemble des solutions est qualitativement «très» différent ! !
On dit que le problème de la détermination des racines d'un polynôme est *instable* par rapport à des petites variations des coefficients.





Interpolation

- En sciences expérimentales, on a en général affaire à un nombre fini de données (mesures) :
  (x_i, y_i) où y_i dépend de x_i pour $0 \leq i \leq n$
  et on suppose $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.
- Or souvent, on veut obtenir un *modèle continue* $f(x) = y$ où f vérifie, pour $0 \leq i \leq n$: $f(x_i) = y_i$ et est continue sur $\mathbb{R}$.

On est obligé **d'interpoler** les données (x_i, y_i).

- Une *interpolation linéaire*, ou d'ordre 1, suppose qu'entre deux points consécutifs (x_i, y_i) et (x_{i+1}, y_{i+1}), la fonction f est identique à un segment de droite
  (*cf.* la commande `plot2d()`) ;
- **L'interpolation** est en un certain sens l'opération inverse à **l'échantillonnage**.
  Attention : sans donner de cadre précis pour le modèle f, on peut avoir une infinité de correspondances
  (voir les exemples présentés pour les graphes !).

Modèles d'interpolation

• *Interpolation linéaire*, ou d'ordre 1 : on relie deux points par un segment.
On obtient une courbe continue, mais pas dérivable.
• *Interpolation spline d'ordre deux* ou *trois* : deux points consécutifs sont reliés par un polynôme d'ordre deux, resp. trois. Ceci permet d'obtenir une courbe d'interpolation régulière.
On doit résoudre jusqu'à $4n$ équations (pour les splines cubiques).
Ces méthodes sont très utilisées en pratique : logiciels de dessins, PAO, CAO ;
en 2D, zoom numérique d'images digitales.
• *Interpolation polynomiale* : on suppose que f est le polynôme unique de degré n qui passe par les $n+1$ points (x_i, y_i).

Suivant la façon de représenter le polynôme cherché, on obtient des algorithmes différents.

Interpolation polynomiale directe

On suppose que $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, comme f doit passer par les (x_i, y_i), on obtient $n+1$ équations :

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = y_i \ , \qquad 0 \leq i \leq n \ .$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_i^0 & x_i^1 & \cdots & x_i^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

la matrice des $(x_i^j)_{0 \leq i,j \leq n}$ est appelée **matrice de Vandermonde**.