Modèles d'interpolation

• *Interpolation linéaire*, ou d'ordre 1 : on relie deux points par un segment.
On obtient une courbe continue, mais pas dérivable.
• *Interpolation spline d'ordre deux* ou *trois* : deux points consécutifs sont reliés par un polynôme d'ordre deux, resp. trois. Ceci permet d'obtenir une courbe d'interpolation régulière.
On doit résoudre jusqu'à $4n$ équations (pour les splines cubiques).
Ces méthodes sont très utilisées en pratique : logiciels de dessins, PAO, CAO ;
en 2D, zoom numérique d'images digitales.
• *Interpolation polynomiale* : on suppose que f est le polynôme unique de degré n qui passe par les $n+1$ points (x_i, y_i).

Suivant la façon de représenter le polynôme cherché, on obtient des algorithmes différents.

Interpolation polynomiale directe

On suppose que $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, comme f doit passer par les (x_i, y_i), on obtient $n+1$ équations :

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = y_i \ , \qquad 0 \leq i \leq n \ .$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_i^0 & x_i^1 & \cdots & x_i^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

la matrice des $(x_i^j)_{0 \leq i,j \leq n}$ est appelée **matrice de Vandermonde**.

Interpolation de LAGRANGE

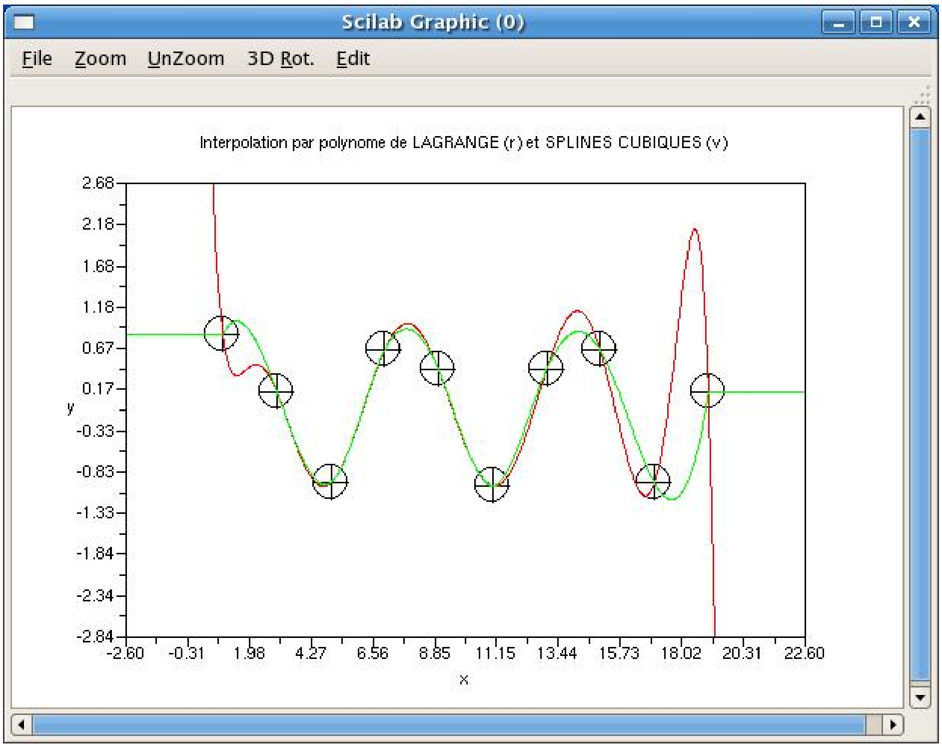
On a aussi $f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, L_i(x)$

où $L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$ avec $L_i(x_k) = \delta_{ik}$

donc

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \; .$$

C'est le **polynôme interpolateur de LAGRANGE** qui vérifie $f(x_i) = y_i$.



Données à interpoler : `x = [ 1:2:20 ]` et `y = sin(x)`

Systèmes d'équations linéaires

On se donne $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, et l'on s'intéresse à la résolution de l'équation matricielle : $Ax = b$ où $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
C'est un *système de m équations linéaires à n inconnues* :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ et $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leq i \leq m\,,\,1 \leq j \leq n}$.

Systèmes d'équations linéaires

Ces systèmes apparaissent dans beaucoup de problèmes concrets en économie, ingénierie, statistiques, . . .
dès que l'on ramène un problème à une approximation dans un espace vectoriel réel de dimension finie.

Ainsi la résolution de systèmes différentiels, de problèmes d'optimisation et d'approximation, la discrétisation d'équations de mécanique des fluides et de mécanique des solides etc.
sont des exemples d'applications où l'on est amené à résoudre des systèmes linéaires pouvant avoir plusieurs milliers d'inconnues.

$\Longrightarrow$ Nécessité des méthodes numériques !

• Dans une base donnée, $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, représente une application linéaire.
• Le **théorème du rang** permet de comprendre les conditions sous lesquelles $A\,x = b$ admet des solutions. On note

$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax = 0_{\mathbb{R}^m}\},$$
$$\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \,/\, \exists x \in \mathbb{R}^n : y = Ax\}$$

et on pose $\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$, alors

$$\mathrm{rang}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) \;=\; n\,.$$

• Si $m > n$, on a plus d'équations que d'inconnues, le système est *sur-déterminé* : si $b \notin \mathrm{Im}(A)$, il n'y a pas de solutions ;

• Si $m < n$, on a moins d'équations que d'inconnues, le système est *sous-déterminé* : si $b \in \mathrm{Im}(A)$, il y a une infinité de solutions, sinon aucune ;

• Si $m = n$ et $\mathrm{rang}(A) = n$, alors A est une matrice carrée inversible et il existe une solution unique $x = A^{-1}b$.

Formules de Cramer

On suppose que $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{rang}(A) = n$, on sait donc qu'il existe une solution unique $x = A^{-1}b$.
On note A_i la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la i-ème colonne par b, alors

$$\text{pour } i = 1, \ldots, n \;:\; x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}\,.$$

On rappelle que le déterminant de A se calcule, *en théorie*, comme suit, en développant par rapport à la i-ème ligne, resp. la j-ème colonne.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,A_{ij}\;,$$

où A_{ij} est le **cofacteur** de l'élément a_{ij} : $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$,

Δ_{ij} est le **mineur** de a_{ij} dans A, c.-à-d. le déterminant de la sous-matrice extraite de A en ôtant la i-ème ligne et la j-ème colonne.