Systèmes d'équations linéaires

On se donne $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, et l'on s'intéresse à la résolution de l'équation matricielle : $A\,x = b$ où $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

C'est un *système de m équations linéaires à n inconnues* :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ et $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i\le m\,,\,1\le j\le n}$.

Systèmes d'équations linéaires

Ces systèmes apparaissent dans beaucoup de problèmes concrets en économie, ingénierie, statistiques, ...
dès que l'on ramène un problème à une approximation dans un espace vectoriel réel de dimension finie.

Ainsi la résolution de systèmes différentiels, de problèmes d'optimisation et d'approximation, la discrétisation d'équations de mécanique des fluides et de mécanique des solides etc.
sont des exemples d'applications où l'on est amené à résoudre des systèmes linéaires pouvant avoir plusieurs milliers d'inconnues.

$\Longrightarrow$ Nécessité des méthodes numériques !

• Dans une base donnée, $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, représente une application linéaire.

• Le **théorème du rang** permet de comprendre les conditions sous lesquelles $A\,x = b$ admet des solutions. On note

$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax = 0_{\mathbb{R}^m}\},$$
$$\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \,/\, \exists x \in \mathbb{R}^n : y = Ax\}$$

et on pose $\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$, alors

$$\mathrm{rang}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) \;=\; n\,.$$

• Si $m > n$, on a plus d'équations que d'inconnues, le système est *sur-déterminé* : si $b \notin \mathrm{Im}(A)$, il n'y a pas de solutions ;

• Si $m < n$, on a moins d'équations que d'inconnues, le système est *sous-déterminé* : si $b \in \mathrm{Im}(A)$, il y a une infinité de solutions, sinon aucune ;

• Si $m = n$ et $\mathrm{rang}(A) = n$, alors A est une matrice carrée inversible et il existe une solution unique $x = A^{-1}b$.

Formules de Cramer

On suppose que $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{rang}(A) = n$, on sait donc qu'il existe une solution unique $x = A^{-1}b$.
On note A_i la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la i-ème colonne par b, alors

$$\text{pour } i = 1, \ldots, n \;:\; x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}\,.$$

On rappelle que le déterminant de A se calcule, *en théorie*, comme suit, en développant par rapport à la i-ème ligne, resp. la j-ème colonne.
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,A_{ij}\;,$$

où A_{ij} est le **cofacteur** de l'élément a_{ij} : $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$,

Δ_{ij} est le **mineur** de a_{ij} dans A, c.-à-d. le déterminant de la sous-matrice extraite de A en ôtant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Question : quel est le nombre de multiplications nécessaires pour résoudre un système linéaire par les formules de Cramer ?

Le nombre de multiplications pour calculer un déterminant d'ordre n est $O(n!)$.

En appliquant les formules de Cramer, on doit exécuter $O((n+1)!)$ multiplications de réels !

$$\begin{array}{lrl} n = 10 & 11! & = 39\,916\,800\ ; \\ n = 20 & 21! & = 5.109 \cdot 10^{19}\ ; \\ n = 100 & 101! & = 9.426 \cdot 10^{159}\ . \end{array}$$

• **Les formules de** Cramer **ont une importance théorique.**
• **En pratique, elles sont inutilisables à partir de $n = 15$, sauf pour des matrices particulières.**

Système triangulaire

C'est un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & & & & & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & & & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 & + & a_{n-1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n-1,n-1}x_n & & & = & b_{n-1} \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n-1}x_n & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

c.-à-d. tous les éléments de A au dessus de la diagonale sont nuls, on dit que A est une **matrice triangulaire inférieure** (ou "L" comme *lower* en anglais).

Si les a_{ii} sont tous non nuls, on a un algorithme simple pour déterminer $x \in \mathbb{R}^n$!

Système triangulaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire inférieure, avec $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$, alors la solution de $Ax = b$ est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{b_1}{a_{11}} \\[2ex] x_i & = & \dfrac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right) \\ & & i = 2, \ldots, n \end{array}\right.$$

On détermine la solution du système linéaire triangulaire en $O(n^2)$ opérations.
La résolution de systèmes triangulaires nécessite donc beaucoup moins d'opérations que la méthode générale de Cramer.

Factorisation LU

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible,
l'algorithme de **factorisation LU** permet de décomposer A en un produit

$$A = L \cdot U$$

d'une matrice L *triangulaire inférieure*, avec des 1 sur la diagonale, et d'une matrice U *triangulaire supérieure* inversible.

Note :

- Si l'un des $a_{ii} = 0$, il suffit de faire des permutations des lignes et colonnes, pour obtenir un élément non nul sur la diagonale : on obtient un *pivot* non nul.

- Si l'on procède à des permutations de façon à ce que a_{ii} soit l'élément de valeur absolue maximale dans toute la sous-matrice restante $(1 \leq i \leq n)$, alors on a l'algorithme d'élimination de Gauss avec *pivot total*.

Factorisation LU

Pour simplifier la présentation de l'algorithme, on ne va pas tenir compte d'éventuelles permutations, ni de l'initialisation des $l_{ii} = 1$.
Note : la commande `lu()` de `Scilab` produit une matrice de permutations, *cf.* `help lu`.

Factorisation LU :

$L = I_n, U = O$
pour $i = 1$ **à** $n-1$
  pour $j = i+1$ **à** n
    $l_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$
  pour $j = i$ **à** n
    $u_{ij} = a_{ij}$
  pour $j = i+1$ **à** n
    pour $k = i+1$ **à** n
      $a_{jk} = a_{jk} - l_{ji} \cdot u_{ik}$
$u_{nn} = a_{nn}$

Quel est le nombre de multiplications+additions nécessaires ?

Résolution de $Ax = b$

Appliquons la factorisation LU à la résolution du système.

Factoriser A en $A = LU$.
Résoudre un système triangulaire inférieur : $L\tilde{x} = b$.
Résoudre un système triangulaire supérieur : $Ux = \tilde{x}$
Ainsi $x = U^{-1}(L^{-1}b)$

Coût : Résolution de deux systèmes triangulaires et décomposition LU.

$$2\,O(n^2) + O(\frac{2}{3}n^3) = O(\frac{2}{3}n^3).$$

Note : on a simplifié en ne tenant pas compte des permutations, nécessaires dans le cas général.