Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MASTER MI 2008-2009

DEVOIR

Équations aux dérivées partielles : Approffondissement

PROBLÈME : l'équation de LAPLACE

Partie I

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $\partial\Omega$ régulier, et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Pour $x \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B_d(x,r) \subset \Omega$, on pose

$$\phi(r) = \frac{1}{r^{d-1}\omega_d} \int_{S^{d-1}(x,r)} u(y)\, dS_y = \frac{1}{\omega_d} \int_{S^{d-1}(0,1)} u(x+rz)\, dz\ ,$$

où l'on a fait le changement de variable $y = x + r\,z$, $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Déterminer $\phi'(r)$ et l'exprimer en fonction de Δu sur $B_d(x,r)$.

En déduire que si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ vérifie la propriété de la moyenne dans Ω, alors u est harmonique sur Ω.

(On rappelle : $aire(S^{d-1}(x,r)) = r^{d-1}\,\omega_d$, $vol(B_d(x,r)) = r^d\,\overline{\omega}_d$ et $\omega_d = d\,\overline{\omega}_d$)

Partie II

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonique, càd $\Delta u = 0$ sur Ω.

On rappelle qu'on a alors la propriété de la moyenne

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u(y)\, dS_y = \frac{1}{\overline{\omega}_d r^d} \int_{B(x_0,r)} u(y)\, dy \qquad (M)$$

pour toute boule $B(x_0,r) \subset \Omega$, où ω_d est l'aire de la sphère unité $\partial B(0,1)$ de $\mathbb{R}^d$.

Pour u harmonique dans Ω on se propose de montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}_k$ ($k \in \mathbb{N}$) :

$(\mathcal{P}_k)$: pour toute boule $B(x_0,r) \subset \Omega$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| = k$: $|D^\alpha u(x_0)| \le \dfrac{C_k}{r^{d+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$,

où $C_0 = \dfrac{1}{\overline{\omega}_d}$, $C_k = \dfrac{(2^{d+1}dk)^k}{\overline{\omega}_d}$ $(k \ge 1)$ et $\overline{\omega}_d$ le volume de la boule unité $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^d$, avec $\omega_d = d\overline{\omega}_d$.

1) Vérifier que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

2) Montrer que u_{x_i} est harmonique ($1 \leq i \leq d$).
Utiliser (M) pour en déduire que pour tout $x_0 \in \Omega$: $|u_{x_i}(x_0)| \leq \dfrac{2d}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r/2))}$.

3) Pour tout $x \in \partial B(x_0, r/2)$, montrer que

$$|u(x)| \leq C_0 \left(\frac{2}{r}\right)^d \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}.$$

4) Conclure que $\mathcal{P}_1$ est vrai.

Soit $k \geq 2$ et α tel que $|\alpha| = k$. On suppose que $\mathcal{P}_i$ est vraie pour $0 \leq i \leq k-1$.

5) Montrer que pour tout $x_0 \in \Omega$: $|D^\alpha u(x_0)| \leq \dfrac{dk}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r/k))}$.

Où $\beta \in \mathbb{N}^d$, $|\beta| = k-1$, et $D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}$ pour $i \in \{1, \ldots, d\}$.

6) Pour $x \in \partial B(x_0, r/k)$, $\beta \in \mathbb{N}^d$, $|\beta| = k-1$, donner une majoration de $|D^\beta u(x)|$ en fonction de $\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$.
(Considérer la boule $B(x, r - r/k)$ et utiliser $(\mathcal{P}_{k-1})$).

7) Conclure que $\mathcal{P}_k$ est vrai.

8) Application de $\mathcal{P}_1$: soit u une fonction bornée et harmonique sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que u est constante.