Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MASTER MA 2008–2009

EDP : Approfondissement

Examen du 24 juin 2009, durée 2h

Les documents et l'utilisation de tout appareil électronique sont interdits.
Justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Problème 1

On se propose de trouver une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$u_t(x,t) = \Delta(u^\nu) \qquad \text{sur } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^* \qquad (*)$$

où $\nu > 1$, $d \geq 2$ et $u \geq 0$.

1. Écrire l'équation aux dérivées partielles sous forme divergence : $u_t = -\mathrm{div}\Big(F(u)\Big)$.
   Préciser F et donner une interprétation de l'équation.

2. On pose $u(x,t) = w(x)v(t)$ et on suppose que u vérifie $(*)$.
   Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que v et w vérifient

$$\begin{aligned} v'(t) - \mu v(t) &= 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+^* \\ \Delta(w(x)^\nu) - \mu w(x) &= 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

3. Trouver $v(t)$. Choisir une solution définie pour tout $\nu > 1$ en $t = 0$.

4. Chercher w en supposant que $w(x) = |x|^\alpha$, donner α en fonction de ν et préciser la valeur de μ en fonction de α et ν.

5. Déduire une solution $u(x,t)$ de $(*)$. Quel en est le domaine de définition ?
   Que se passe-t-il aux bornes de ce domaine ?

Problème 2

Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[$
et $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω.

1. Définir les espaces $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. Donner leur structure.
2. Montrer que l'on a :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \; : \; \int_\Omega u^2 \, dxdy \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dxdy \, .$$

   (Supposer d'abord que u est dans $\mathcal{D}(\Omega)$)
   Donner un exemple de fonction u telle que $u \in H^1(\Omega)$ et $u \notin H_0^1(\Omega)$.

On pose $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$ et $l(v) = \displaystyle\int_\Omega f v \, dxdy$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ et $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Quelle est l'équation vérifiée par u si on a :

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \; : \; a(u,v) = l(v) \, .$$

4. Montrer que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ et que, pour $f \in L^2(\Omega)$, $l(.)$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$.

5. Montrer qu'il existe une constante $\nu > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, $a(u,u) \geq \nu \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$.

6. En déduire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution u de :

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in H_0^1(\Omega) \\ \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \; : \; a(u,v) = l(v) \, . \end{array} \right.$$

7. Montrer que pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$: $a(u,v) = a(v,u)$. Conclusion ?
   (Supposer d'abord que u et v sont dans $\mathcal{D}(\Omega)$)