Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MASTER MA 2008–2009

EDP : Approfondissement

Examen du 27 mai 2009, durée 2h

Les documents et l'utilisation de tout appareil électronique sont interdits.
Justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Problème 1

On pose $K(x,y,t) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ et on rappelle que $v(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)\, f(y)\, dy$ est solution de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$:

$$v_t = \Delta v \text{ dans } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\,, \text{ avec } v(x,0) = f(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n\,.$$

On considère le problème non linéaire suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} w_t - a\,\Delta w + b\,|\nabla w|^2 = 0\,, & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*_+\,, \\ w = g\,, & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}\,, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}^*_+$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$.

(i) Soit w une solution $\mathcal{C}^\infty$ de (1).
Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*_+$, on pose $u(x,t) = \phi(w(x,t))$, où $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
Calculer u_t et Δu.
Déterminer ensuite ϕ tel que le problème (1) devient

$$(2) \quad \begin{cases} u_t = a\,\Delta u\,, & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*_+\,, \\ u = e^{-bg/a}\,, & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}\,, \end{cases}$$

Écrire la solution $u(x,t)$ de (2).

(ii) Donner une solution de (1).

Problème 2

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ avec $\partial\Omega$ régulier, on note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω.

1. Définir les espaces $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. Donner leur structure.
   Pourquoi a-t-on $H_0^1(\Omega) \underset{\neq}{\subset} H^1(\Omega)$?
   Énoncer de façon précise l'inégalité de Poincaré.

On considère le problème de Dirichlet suivant : $(*) \begin{cases} Lu = f & \text{pour } (x,y) \in \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$

L'opérateur différentiel L est défini, sous forme divergence, par $Lu = -\sum_{1\leq i,j\leq 2} \left(a_{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} + 2cu$

où $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = -c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $f \in L^2(\Omega)$.

2. Pour $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, écrire $(*)$ sous forme "standard".

3. Montrer que pour $|c| < 1$, L est elliptique,
   c'est-à-dire qu'il existe $\nu > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^2$: $\sum_{1\leq i,j\leq 2} a_{ij}\, \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2$.

On suppposera $|c| < 1$ et donc L elliptique pour la suite.

4. Donner la formulation faible du problème $(*)$ sous la forme $a(u,v) = l(v)$.
   Pour cela, préciser la forme bilinéaire symétrique $a(.,.)$, la forme linéaire l et l'espace fonctionnel H auquel appartiennent u et v.

5. Montrer que a et l sont des formes (bi)linéaires continues sur H.

6. Sous quelles conditions a-t-on l'existence d'une constante $\beta > 0$ telle que,
   pour tout $u \in H$: $a(u,u) \geq \beta \, \|u\|_H^2$?
   Note : discuter en fonction de $|c| < 1$.

7. Justifiez l'existence et l'unicité d'une solution u faible de $(*)$.

8. Donner une caractérisation de u en tant que minimum sur H d'une fonctionnelle d'énergie $E[.]$ que l'on précisera.