Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

MASTER MA 2008–2009

EDP : Approfondissement

Examen partiel, 8 avril 2009, durée 1h30

Les documents et l'utilisation de tout appareil électronique sont interdits.
Justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice 1

On pose $K(x,y,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ et on rappelle que $u(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} K(x,y,t)\, f(y)\, dy$ est solution de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}$: $u_t = \Delta u$ dans $\mathbb{R}\times]0,\infty[$, avec $u(x,0) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On veut déterminer une solution $u(x,t)$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ du problème

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} + V u_x - \varphi(t) & = & 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) & = & f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, t = 0 \end{array}\right. \qquad \text{où } V \in \mathbb{R} \text{ et } f, \varphi \text{ sont continues.}$$

1. Interprétez les différents termes de l'équation aux dérivées partielles ci-dessus.
2. Cherchez une solution du problème sous la forme $u(x,t) = w(t) + v(y,t)$ où $y = x - Vt$.
3. Interprétez la solution trouvée en 2 en fonction des remarques du 1.

Exercice 2

Soit ω un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^2$ et $\Omega_T = \omega\times]0,T]$, pour $T > 0$.

On suppose que $w \in \mathcal{C}^2(\Omega_T)$ est une solution de $\left\{\begin{array}{rcll} w_t - \Delta w & = & 0 & \text{pour } (x,t) \in \omega\times]0,T[\\ w(x,t) & = & 0 & \text{pour } x \in \partial\omega, t \in [0,T] \end{array}\right.$.

Pour $t \in [0,T]$, on pose $E(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\omega w(x,t)^2\, dx$.

1. Calculer $E'(t)$, pour $t \in]0,T]$. Exprimez le résultat grâce à $|\nabla w|$.
2. Calculer $E''(t)$, pour $t \in]0,T]$. Exprimez le résultat grâce à Δw.
3. Montrez que pour $t \in]0,T[$, $E'(t)^2 \le E(t)\, E''(t)$.
4. Soit $[t_1,t_2] \subset]0,T[$ tel que pour $t \in [t_1,t_2]$, $E(t) > 0$.
   On pose $h(t) = \ln(E(t))$, calculer $h''(t)$ et en déduire que h est convexe sur $[t_1,t_2]$.
   En déduire une majoration de $E(t)$ pour $t_1 < t < t_2$.
5. On suppose que $w(x,T) = 0$ pour tout $x \in \omega$.
   Déduire de ce qui précède que $E(t) = 0$ pour $t \in]0,T]$. Que peut-on dire de w ?

6. Soient u, $\tilde{u} \in \mathcal{C}^2(\Omega_T)$, respectivement solutions de

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t & = & \Delta u & \text{pour } (x,t) \in \omega\times]0,T[\\ u(x,t) & = & f(x,t) & \text{pour } x \in \partial\omega, t \in [0,T] \\ u(x,T) & = & g(x) & \text{pour } x \in \omega, t = T \\ u(x,0) & = & h(x) & \text{pour } x \in \omega, t = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcll} \tilde{u}_t & = & \Delta \tilde{u} & \text{pour } (x,t) \in \omega\times]0,T[\\ \tilde{u}(x,t) & = & f(x,t) & \text{pour } x \in \partial\omega, t \in [0,T] \\ \tilde{u}(x,T) & = & g(x) & \text{pour } x \in \omega, t = T \\ \tilde{u}(x,0) & = & \tilde{h}(x) & \text{pour } x \in \omega, t = 0 \end{array}\right.$$

où f et g sont continues et $f(x,0) = h(x) = \tilde{h}(x)$ pour tout $x \in \partial\omega$.

Que peut-on dire de $u - \tilde{u}$ sur Ω_T ? sur $\omega \times \{t = 0\}$?
Discutez le résultat.

Exercice 3

Soit Ω un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{A} = \{v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \,/\, v_{|\partial\Omega} = 0\}$.

Pour $v \in \mathcal{A}$, on pose $E[v] = \displaystyle\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla v|^2 - \frac{1}{n+1}v^{n+1}\right]dx$.

Soit $u \in \mathcal{A}$ et $E[u] = \min\limits_{v\in\mathcal{A}} E[v]$, montrer que u est solution de l'équation de Poisson non linéaire

$$(*) \left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & u^n & \text{sur } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

Indic. : Calculer $\Phi'(0)$ où, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\Phi(h) = E[u + h\varphi]$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ quelconque.