Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MASTER MA 2009–2010

EDP : Approfondissement

Examen partiel, 13 avril 2010, durée 1h30

Les documents et l'utilisation de tout appareil électronique sont interdits.
Justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice 1

On se propose de trouver une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$u_t(x,t) = \Delta(u^\nu) \qquad \text{sur } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^* \qquad (*)$$

où $\nu > 1$, $d \geq 2$ et $u \geq 0$.

1. Écrire l'équation aux dérivées partielles sous forme divergence : $u_t = -\text{div}\Big(F(u)\Big)$.
   Préciser F et donner une interprétation de l'équation.

2. On pose $u(x,t) = w(x)v(t)$ et on suppose que u vérifie $(*)$.
   Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que v et w vérifient
   $$\begin{aligned} v'(t) - \mu v(t)^\nu &= 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+^* \\ \Delta(w(x)^\nu) - \mu w(x) &= 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

3. Trouver $v(t)$. Choisir une solution définie pour tout $\nu > 1$ en $t = 0$,.

4. Chercher w en supposant que $w(x) = |x|^\alpha$, donner $\alpha \in \mathbb{R}$ en fonction de ν et préciser la valeur de μ en fonction de α et ν.

5. Déduire une solution $u(x,t)$ de $(*)$. Quel en est le domaine de définition ?
   Que se passe-t-il aux bornes de ce domaine ?

Exercice 2

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, de bord $\partial\Omega$ régulier et $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, f et g régulières, données.
Utiliser les formules de Green pour démontrer

1. Une solution $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ du problème de Dirichlet
   $$\begin{cases} \Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ \quad u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
   est unique.

2. Une solution $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ du problème de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est unique à une constante près si f et g sont compatibles.
On explicitera la relation entre f et g.

3. Le problème

$$\begin{cases} \Delta u = u^n & \text{sur } \Omega \\ \quad u = \ 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

n'admet que la solution nulle si n est impair.