Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MASTER MA 2010–2011

EDP : Approfondissement

Examen du 19 mai 2011, durée 2h

Les documents et l'utilisation de tout appareil électronique sont interdits. Justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice 1

Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^d$.

1. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Montrer que u n'admet pas de maximum en $x \in \Omega$ si $\Delta u(x) > 0$.

2. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ vérifiant
$$\begin{cases} \Delta u = u^3 - u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
Montrer que, pour tout $x \in \Omega$, $-1 \leq u(x) \leq 1$.

   Indic. : faire une démonstration par l'absurde.

Exercice 2

Dans un tube vertical, on considère des particules en suspension dans un liquide, la densité de particules est notée $u(z,t)$, où $t \geq 0$ est la variable temps et z la hauteur dans le tube.

On suppose que le problème est symétrique, qu'il n'y a ni création, ni perte de particules et on ne considère qu'une dimension spatiale : l'axe Oz qui pointe vers le haut.

Les particule suivent deux flux : elles descendent à vitesse constante $V > 0$. et on suppose un flux de particules F donné par la loi de Fick : les particules vont des hautes densités vers les faibles densités et leur flux est proportionnel à la variation de la densité.

1. Expliciter le flux F induit par la loi de Fick. Discutez le signe de F.
2. Écrire la variation de particules dans l'intervalle $[z_1, z_2]$ en écrivant le nombre de particules entrant/sortant en z_1 et z_2.
3. En déduire que l'équation vérifiée par la concentration des particules est de la forme
$$u_t = \epsilon_1 V u_z + \epsilon_2 k u_{zz}\,, \text{ où } k > 0, \epsilon_i = \pm 1 \text{ (signe à déterminer).}$$
De quel type d'équation s'agit-il ?
4. Résoudre l'équation trouvée.

Indic. : on rappelle que $u(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}} f(y)\, dy$ est solution, dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, de l'équation de la chaleur avec condition initiale $u(x,0) = f(x)$ et où $k > 0$ est le coefficient de diffusion.

Exercice 3

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ avec $\partial\Omega$ régulier. On se propose de montrer qu'il existe une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ de :

$$-\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + bu = f \text{ sur } \Omega \qquad (*)$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $b \in L^\infty(\Omega)$ et $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ pour $1 \leq i, j \leq d$.
On suppose de plus que $b(x) \geq 0$ p.p. dans Ω et qu'il existe ν tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a $\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2$ p.p. dans Ω.

On pose $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d}(a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}) + buv\right)$ et $l(v) = \displaystyle\int_\Omega fv\,.$

1. Rappeler la définition de $H_0^1(\Omega)$. Que implique son utilisation pour le problème $(*)$.
2. Montrer que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe une constante $\mu > 0$ tel que $a(u,u) \geq \mu\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.
4. Montrer que pour $f \in L^2(\Omega)$, $l(.)$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$.
5. Déduire de ce qui précède qu'il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de $(*)$.

Exercice 4

Soit Ω un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{A} = \{v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \,/\, v_{|\partial\Omega} = 0\}$.

Pour $v \in \mathcal{A}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, on pose $E[v] = \displaystyle\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla v|^2 - \frac{1}{n+1}v^{n+1} - fv\right]dx.$

Soit $u \in \mathcal{A}$ et $E[u] = \min\limits_{v\in\mathcal{A}} E[v]$.
Montrer que u est solution d'un problème de Poisson non linéaire que l'on explicitera.

Indic. : Calculer $\Phi'(0)$ où, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\Phi(h) = E[u + h\varphi]$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ quelconque.