Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MASTER MA 2010–2011

EDP : Approfondissement

Examen partiel, 29 mars 2011, durée 1h30

Les documents et l'utilisation de tout appareil électronique sont interdits.
Justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice 1

1. Soit $k > 0$, $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u_t = & k\, u_{xx} - \dfrac{u}{1+t^2}, \quad & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \, ; \\ u(x,0) = & \phi(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R} \, . \end{cases}$$

   (Indic. : poser $u(x,t) = w(t)v(x,t)$)

2. Interprétez les termes de cette équation. Retrouvez l'apport des termes dans l'expression de la solution.
   On rappelle que $v(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy$

   est une solution de $v_t = v_{xx}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ avec $v = f$ sur $\mathbb{R} \times \{t = 0\}$.

Exercice 2

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord régulier. Soient $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ telles que, pour tout $x \in \Omega$, $\Delta u(x) \geq 0$ et $\Delta v(x) = 0$.
   Montrer que si $u \leq v$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq v$ sur Ω. On dit que u est sous-harmonique.

2. Montrer que les solutions radiales de l'équation de Laplace $\Delta v(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{O\}$ sont données par

$$v(x) = \begin{cases} C \ln(r) + C' & \text{si } d = 2 \\ C r^{2-d} + C' & \text{si } d > 2 \end{cases}, \quad r = |x| \text{ et } (C, C') \in \mathbb{R}^2 \, .$$

3. Soit $d = 2$, pour $0 < a < b$, on pose $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 / a < |x| < b\}$.
Soit $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ vérifiant, pour tout $x \in \Omega$, $\Delta u(x) \geq 0$.

On définit, pour tout $r > 0$, $\quad M(r) = \max_{|x|=r} u(x)\,.$

Montrer que pour $a < r_1 < r < r_2 < b$, on a

$$(*) \qquad M(r) \leq \frac{\log(r_2/r)}{\log(r_2/r_1)} M(r_1) + \frac{\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)} M(r_2)\,.$$

Pour cela :

(a) Déterminer C et C', tel que $M(r_i) = C \ln(r_i) + C'$, $i = 1, 2$;

(b) Conclure.
(Indic. : utiliser 1.)

4. Montrer que $M(.)$ est une fonction convexe de $s = \log(r)$.

5. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, bornée supérieurement sur $\mathbb{R}^2$ et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\Delta u(x) \geq 0$.
Montrer qu'alors u est constante sur $\mathbb{R}^2$.
Pour cela, en définissant $M(r)$ comme en 3 :

(a) Montrer que pour tout $0 < r_1 \leq r$, $M(r) \leq M(r_1)$;

(b) Montrer que pour tout $r_2 \geq r$, $M(r) \leq M(r_2)$;

(c) En déduire que M est constante ;

(d) Conclure.