Licence 3, S5, 2019–2020

Méthodes Numériques
Contrôle du 25 mai 2020, durée 1h30

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

En déposant ce document sur la page Moodle du contrôle, je m'engage sur l'honneur à respecter les conditions d'examen lors de la dernière épreuve de contrôle continu organisé pour l'enseignement «Méthodes numériques». Plus particulièrement :

— Lors de cette épreuve, je pourrai utiliser les notes de cours (manuscrites ou pdf) et les corrigés des exercices ou DM.

— Je respecterai le délai imparti pour cette épreuve : 1h30 (2h seulement pour les étudiants ayant un tiers temps).

— Je ne ferai appel à personne pour ce contrôle.

— Je ne communiquerai avec personne sur le contenu du sujet ou sur sa solution et ce pendant au moins 2h30 (durée de l'épreuve avec le tiers temps et le délai de dépôt).

Exercice 1

Pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix}$.

Soit $b \in \mathbb{R}^3$ quelconque, on s'intéresse à la résolution de $Ax = b$ par méthodes itératives.

1. Pour quelles valeurs de α, β, γ et δ la matrice est-elle inversible ? On supposera dans la suite A inversible.

2. Donner des conditions suffisantes sur α, β, γ et δ, pour avoir convergence de la méthode de Jacobi et convergence de la méthode de Gauss-Seidel.

3. Écrire la matrice de Jacobi J associée à A. Calculer ses valeurs propres et en déduire une conditions nécessaire et suffisante de convergence de la méthode de Jacobi.

Exercice 1bis

Pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \delta \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Soit $b \in \mathbb{R}^3$ quelconque, on s'intéresse à la résolution de $Ax = b$ par méthodes itératives.

1. Pour quelles valeurs de α, β, γ et δ la matrice est-elle inversible ? On supposera dans la suite A inversible.

2. Donner des conditions suffisantes sur α, β, γ et δ, pour avoir convergence de la méthode de Jacobi et convergence de la méthode de Gauss-Seidel.
3. Écrire la matrice de Jacobi J associée à A. Calculer ses valeurs propres et en déduire une conditions nécessaire et suffisante de convergence de la méthode de Jacobi.

Exercice 2
Soit $\|.\|$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_v = \|X\|$ où $X = [x\ x\ \cdots\ x] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire X est la matrice dont les n colonnes sont identiques au vecteur x.

1. Montrer que $\|.\|_v$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\|Ax\|_v \leq \|A\|\|x\|_v$.
3. Soit $N(.)$ la norme induite sur les matrices par $\|.\|_v$, montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $N(A) \leq \|A\|$.

Exercice 2bis
Soit $\|.\|$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$ non nul fixé. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_y = \|x\, y^t\|$.

1. Montrer que $\|.\|_y$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\|Ax\|_y \leq \|A\|\|x\|_y$.
3. Soit $N_y(.)$ la norme induite sur les matrices par $\|.\|_y$, montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $N_y(A) \leq \|A\|$.

Exercice 3
On considère l'équation $Ax = b$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. On définit la suite récurrente suivante

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ x^{(\mathrm{k}+1)} = Bx^{(\mathrm{k})} + b, \text{ pour } k \geq 0 \end{cases}$$

avec $B = I_n - A$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de cette suite récurrente. Que vaut alors $\lim_{k \to +\infty} x^{(\mathrm{k})}$?
2. Grâce au théorème der Gershgorin, donner une condition suffisante simple sur A pour assurer la convergence de la suite récurrente.

3. Que peut-on dire sur la convergence de la suite $(x^{(\mathrm{k})})_{k\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants (on justifiera quel critère permet de conclure, ainsi que les valeurs de α)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 3/4 & 10/9 \\ 1/2 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

On considère une matrice A carrée réelle de taille n de la forme

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

où P est une matrice carrée inversible de taille n_p, R une matrice carrée inversible de taille n_r, et Q une matrice de taille $n_p \times n_r$, avec $n = n_p + n_r$. 0 est la matrice nulle de taille $n_p \times n_r$. Soit également $b \in \mathbb{R}^n$ quelconque.

1. Quel est le nombre d'opérations scalaires nécessaires si l'on résout le système $Ax = b$ par la méthode LU directement ?
2. Montrer que la solution du système linéaire $Ax = b$, peut être obtenue en résolvant un système linéaire de matrice R puis un système linéaire de matrice P.
3. Quel est le nombre d'opérations scalaires nécessaires pour cette deuxième méthode ?

Exercice 4bis

On considère une matrice A carrée réelle de taille n de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

où A_{11} est une matrice carrée inversible de taille n_1, 0 est la matrice nulle de taille $n_1 \times n_2$, A_{21} une matrice de taille $n_2 \times n_1$ et une matrice carrée inversible de taille n_2 avec $n = n_1 + n_2$. Soit également $b \in \mathbb{R}^n$ quelconque.

1. Quel est le nombre d'opérations scalaires nécessaires si l'on résout le système $Ax = b$ par la méthode LU directement ?
2. Montrer que la solution du système linéaire $Ax = b$, peut être obtenue en résolvant un système linéaire de matrice R puis un système linéaire de matrice P.
3. Quel est le nombre d'opérations scalaires nécessaires pour cette deuxième méthode ?