UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3$^{\text{e}}$ année, 2010–2011

Méthodes Numériques

Examen du 19 mai 2011

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

1. Énoncer le théorème du point fixe.
2. Soit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$.
   (a) Donner la méthode des rectangles à gauche, $I_N^G(f)$, pour évaluer $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.
   (b) Donner une ligne de code Scilab sans boucle, qui évalue $I_N^G(f)$.
3. On considère l'équation différentielle $y'(t) = g(t, y(t))$ avec $y(0) = y_0$ et $t \in [0, T]$. On suppose que g vérifie les hypothèses de régularité suffisantes pour avoir une solution unique.
   (a) Donner la méthode d'Euler pour résoudre cette équation.
   (b) Donner une fonction Scilab qui calcule la solution grâce à la méthode d'Euler.

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A est symétrique et définie positive.
2. Notons L la matrice triangulaire inférieure à diagonale <u>strictement positive</u>

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}.$$

   Identifier les coefficients $(l_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$ de la matrice L à partir de ceux de A en posant

$$A = L\,L^T \quad \text{où } L^T \text{ est la matrice transposée de } L\,.$$

3. Soit $b = (5, 1, 7)^T$, on se propose de résoudre l'équation

$$A\,x = b\,, \qquad \text{avec } x = (x_1, x_2, x_3)^T\,.$$

   A partir de la question précédente, donner une méthode de résolution (sans faire les calculs).
4. Résoudre l'équation $A\,x = b$.

Exercice 2. On définit pour tout réel x la fonction f par $f(x) = x^2 - \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et, quand elle est définie, la fonction F par $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

1. Vérifier que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, que f admet un unique zéro sur $\mathbb{R}_+^*$ et que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \in \mathbb{R}_+^*$.

   On construit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de façon récursive : pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ donné on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = F(x_n)$.

2. Il s'agit de quelle méthode vue en cours ? Que peut-on donc dire, de façon générale, de la convergence de la suite (x_n) ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = \dfrac{x_n - \sqrt{\alpha}}{x_n + \sqrt{\alpha}}$.
   Exprimez y_n en fonction de x_{n-1}. En déduire que $y_n = y_0^{2^n}$.

4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $x_0 > 0$ vers $\sqrt{\alpha}$.

5. Montrer que si $x_0 \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{\sqrt{\alpha}\}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x_{n+1} - \sqrt{\alpha}|}{|x_n - \sqrt{\alpha}|^2} = C$, où $C > 0$.
   Interpréter ce résultat en termes de vitesse de convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ donné.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $0 \leq x_{n-1} - \sqrt{\alpha} \leq 2(x_{n-1} - x_n)$.

   (b) En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $0 \leq x_n - \sqrt{\alpha} \leq x_{n-1} - x_n$.

   (c) À quoi peut servir le résultat du 6b lors de calculs numériques ?