UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3e année, 2010–2011

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Examen du 23 juin 2011

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

Expliquez la méthode de Newton et énoncez le théorème de convergence associé.

Exercice 1.

On se propose de résoudre l'équation $P(x) = 0$, où $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $P(\alpha) = b_0$ et $P_1(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + b_2 x + b_1$
où P_1 vérifie la relation $P(x) = (x - \alpha)P_1(x) + b_0$.

1. Écrire l'équation itérative de la méthode de Newton pour l'équation $P(x) = 0$.
2. Écrire l'algorithme de Horner permettant le calcul de $P(\alpha)$ pour un réel quelconque α.
3. Comment peut-on calculer $P'(\alpha)$?
4. Écrire une fonction Scilab `x=poly_newton(x0,P)` pour résoudre l'équation $P(x) = 0$. En entrée on donne la valeur initiale `x0` et le polynôme `P`, en sortie on obtient une valeur approchée de x.
   On pourra utiliser les fonctions Scilab `poly`, `coeff` et `horner`.

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx$.

1. Utiliser la méthode du trapèze, avec $N + 1 \in \mathbb{N}^*$ points équirépartis sur $[0, 1]$ pour calculer I_n grâce à une fonction Scilab `I = int_trap(n,N)` .
   Écrire d'abord la formule utilisée de façon à faire le moins d'opérations possible. Quel est alors ce nombre d'opérations ?
2. Calculer I_0 et I_1. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}.
   En déduire une fonction Scilab `I = int_iter(n)` qui calcule I_n par récurrence sur n.
   Quel est le nombre d'opérations nécessaires ? Comparez avec le 1.

Exercice 3.

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$, $a < b$, vérifiant :

(i) il existe un unique $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$;

(ii) f' est continue, de signe constant et $0 < m \leq |f'(x)| \leq M$ sur $[a, b]$.

Pour trouver la racine unique α, on va étudier l'itération $x_{n+1} = x_n - f(x_n)$.
On suppose que cette itération diverge et l'on étudie alors

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \lambda f(x_n) \ ,$$

il faut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et $K > 0$ tels que $|g'(x)| \leq K < 1$.

1. Montrer qu'il faut choisir λ tel que $\lambda f'(x) > 0$ et $\dfrac{1-K}{m} \leq |\lambda| \leq \dfrac{1+K}{M}$.

   Montrer que l'existence de tels λ est liée à la condition $K \geq \dfrac{M-m}{M+m}$.

2. Représentez les fonctions $u(K) = (1-K)/m$ et $v(K) = (1+K)/M$, $0 \leq K \leq 1$.
   Hachurez le domaine des valeurs $(K, |\lambda|)$ admissibles.
   Quel est le meilleur choix de K ? En déduire celui de $|\lambda|$.

3. Application : $f(x) = 2e^{-x^2} - x$.
   Montrer que les conditions (i) et (ii) sont vérifiées sur l'intervalle $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$.
   Évaluez m, M. Quel est le meilleur choix de K et de λ ?