Licence 3^{e} année, 2014–2015

Méthodes Numériques

Examen du 27 avril 2015

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n), n \geq 1$, une matrice inversible. On cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$ grâce à la méthode de Jacobi. On rappelle que l'on écrit la décomposition $A = M - N$ avec M la matrice diagonale de A et l'itération $x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$ pour $k \geq 0$, $x^{(0)}$ donné. On suppose que M est inversible.

1. Pour $1 \leq i \leq n$, écrire $x_i^{(k+1)}$ en fonction de $x_i^{(k)}$.
2. En déduire la complexité d'une itération de la méthode de Jacobi.

Exercice 1.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Énoncer le théorème de Gershgorin, en déduire un encadrement des valeurs propres de A sans calculer directement les valeurs propres.
2. Déduire l'existence de la factorisation de Cholesky pour la matrice A.
3. Effectuer la factorisation de Cholesky de la matrice A.

Exercice 2.

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1+\varepsilon \end{pmatrix}$.

On s'intéresse à la stabilité des solutions du système $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer $\det A$ et l'inverse A^{-1}.
2. Justifier que $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$ et donner la valeur de $\|A\|_\infty$.
3. Donner le conditionnement $c_\infty(A)$. Que peut-on dire de A ?

   On pose $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer x, solution de $Ax = b$.

5. Suite aux erreurs d'arrondi on suppose que la solution obtenu est de la forme $\tilde{x} = x + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ où x est la solution calculée en 4. Déterminer le résidu $r = A\tilde{x} - b$.
6. Calculez l'erreur relative $\|\tilde{x} - x\|_\infty / \|x\|_\infty$ et $\|r\|_\infty$.
   Commentez les résultats.

Exercice 3.
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique définie positive.

1. Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$, on note $< u, v >_A = u^t\, Av$. Vérifiez que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

   On note $\|v\|_A = \sqrt{< v, v >} = \left(v^t Av\right)^{\frac{1}{2}}$ la norme *vectorielle* associée et aussi par $\|\cdot\|_A$ la norme *matricielle* sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, subordonnée à cette norme vectorielle.

   On suppose que A possède une décomposition de la forme $A = M - N$ avec M inversible.
2. Démontrer que la matrice $M^t + N$ est symétrique.

   On suppose dans toute la suite que $M^t + N$ est une matrice symétrique et définie positive.
3. Démontrer que
$$\left\|M^{-1}N\right\|_A = \sup_{\|v\|_A = 1} \left\|v - M^{-1}Av\right\|_A .$$
4. Soient deux vecteurs $v, w \in R^n$ tels que $\|v\|_A = 1$ et $w = M^{-1}Av$. Démontrer que
$$\|v - w\|_A^2 = 1 - w^t(M^t + N)w$$
   en déduire que $0 \leq w^t(M^t + N)w \leq 1$.
5. Montrer que $\|M^{-1}N\|_A \leq 1$.
6. Montrer que si $\|M^{-1}N\|_A = 1$, alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_A = 1$, tel que $Av = 0$.
7. Montrer que si $M^t + N$ est définie positive, alors la méthode itérative associée à la décomposition $A = M - N$ est convergente.

Exercice 4.
Écrire une fonction Scilab `[x] = resol_syst_lin(A,b)` qui détermine la solution de $Ax = b$.
On pourra utiliser la fonction Scilab `[L,U]=lu(A)` et supposer ne pas avoir besoin de permutations.
Tout le reste doit être programmé, on pourra faire plusieurs fonctions...
Expliquez ce vous faites !