UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3^e^ année, 2013–2014

Méthodes Numériques

Examen du 28 avril 2014

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

Soit $\|.\|$ une norme sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

1. Donner la définition de la norme matricielle sous-jacente à cette norme vectorielle et que l'on notera aussi $\|.\|$.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n$: $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$.
3. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Exercice 1

On veut résoudre le *système linéaire tridiagonal* $A\,x = y$ dans $\mathbb{R}^n$, où

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On pose $a_1 = c_n = 0$ et on suppose que les a_i, b_i et c_i sont tels que les calculs qui suivent ne donnent pas de division par zéro.

1. Montrer par récurrence que les coordonnées du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ vérifient la relation $x_i = A_i x_{i+1} + B_i$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.
   Déterminer, en fonction des a_i, b_i, c_i et y_i, les réels A_i et B_i pour $i = 1, \ldots, n-1$.
2. Montrer que $x_n = B_n$.
3. En utilisant ce qui précède, écrire une fonction Scilab `[x]=resol_tri(A,y)` de résolution d'un système tridiagonal. Prévoir des tests pour éviter les divisions par zéro.
4. Donner le nombre d'opérations. Comparer aux méthodes vues en cours.

Exercice 2

Soit I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $B = \left(b_{ij}\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\operatorname{spec}(B) \subset \bigcup\limits_{1\le i\le n} D(b_{ii}, R_i)$ où

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C}, |b_{ii} - z| \le \sum_{j\neq i} |b_{ij}| \right\} = D(b_{ii}, R_i) \subset \mathbb{C}, \quad \text{avec } R_i = \sum_{j\neq i} |b_{ij}|\,.$$

Pour toute la suite on considère les matrices $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

pour $1 \le i \ne j \le n$: $a_{ij} \le 0$; pour $1 \le i \le n$: $a_{ii} > 0$

et pour $j = 1, \ldots, n$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0$.

2. Pour tout $x = (x_1 \cdots x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, on définit $\|x\|_A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}|x_i|$.

   Montrer que $\|.\|_A$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Pour toute la suite on suppose que $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et on pose $A_\mu = A + \mu I_n$.

3. Localiser (sans les calculer) les valeurs propres de la matrice A_μ. En déduire qu'elle est inversible.

4. On considère le système linéaire $\qquad A_\mu x = b \ (*)$.

   Vérifier que l'on peut appliquer la méthode de Jacobi à ce système et qu'elle est convergente. Écrire l'équation itérative qui permet de calculer la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$.

   Écrire les formules qui permettent de calculer les coordonnées du vecteur $x^{(k+1)}$ par la méthode de Jacobi.

5. En déduire que la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_A \le \frac{1}{(1+m)^k} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_A$$

   où $m = \min\limits_{1\le i\le n} \dfrac{\mu}{a_{ii}} \in \mathbb{R}_+^*$.

6. Montrer que la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ est de Cauchy. En déduire de nouveau qu'elle converge vers la solution du système $(*)$.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

1. Énoncer et appliquer un résultat du cours qui permet d'affirmer que la matrice A admet une décomposition LU.
2. Déterminer une décomposition $A = LU$ où L est triangulaire inférieure avec des "1" sur la diagonale et où U est triangulaire supérieure.