UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3e année, 2011–2012

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Examen du 31 mai 2012

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

On considère l'équation différentielle $y'(t) = g(t, y(t))$ avec $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d$, $g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $t \in [0,T]$ ($T > 0$, $d \in \mathbb{N}^*$).

On suppose que g vérifie les hypothèses de régularité suffisantes pour avoir une solution unique.

1. Donner la méthode d'Euler pour résoudre cette équation.
2. Donner une fonction Scilab qui calcule la solution grâce à la méthode d'Euler.

Exercice 1.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Énoncer le théorème de Gershgorin, en déduire un encadrement des valeurs propres de A (ne pas tenter de calculer directement les valeurs propres).
2. Déduire l'existence de la factorisation de Cholesky pour la matrice A.
3. Effectuer la factorisation de Cholesky de A.
4. Expliquer comment la factorisation de A permet de résoudre le système $Ax = b$, où $b \in \mathbb{R}^3$ (ne pas faire les calculs).

Exercice 2.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ donné, on considère la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire la matrice $\mathcal{J}$ de la méthode itérative de Jacobi.
2. Énoncez une condition suffisante pour la convergence de la méthode de Jacobi. Donnez les valeurs de α pour lesquelles cette condition est vérifiée.
3. Énoncez une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la méthode de Jacobi. Donnez les valeurs de α pour lesquelles cette condition est vérifiée.

Exercice 3. (Schulz, 1933)

Soit A, une matrice réelle carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, que l'on suppose inversible.
On considère la suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A_{k+1} = A_k(I_n + E_k), \qquad \text{pour } k \geq 0; \end{array} \right. \qquad (*)$$

où I_n est le matrice identité d'ordre n et $E_k = I_n - A\,A_k$ $(k \geq 0)$.
On note O_n la matrice nulle d'ordre n, $\rho(B)$ le rayon spectral d'une matrice B.

1. Exprimer E_k en fonction de E_{k-1}.
   En déduire que pour tout $k \geq 0$ on a $E_k = {E_0}^{2^k}$.
2. Exprimez $A_k - A^{-1}$ en fonction de E_k.
   En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A^{-1}$ si et seulement si $\rho(E_0) < 1$.
3. On suppose que $A = I_n - B$, avec $\rho(B) < 1$ et on pose $A_0 = I_n$.
   (a) Écrire E_0, A_1 et E_1 en fonction de B.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout $k \geq 0$: $\quad A_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{2^k-1} B^j$.
   (c) Montrer que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, définie par $A_0 = I_n$ et $(*)$, est convergente.
4. On considère la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Calculer A^{-1}. Vérifier que l'on peut appliquer l'algorithme du point 3.
   Calculer B^j $(j \geq 0)$. Calculer A_k et $\|A_k - A^{-1}\|_1$.
5. On considère la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Calculer A^{-1}. Est-ce que l'on peut encore appliquer l'algorithme donné au point 3 ?
   Poser $A_0 = \frac{1}{4} \cdot {}^tA$, vérifier que $(*)$ définit alors une suite convergente.
6. Vérifier que la méthode $(*)$ est convergente pour $A_0 = \dfrac{1}{\|A\|\|{}^tA\|}\,{}^tA$,
   où $\|.\|$ désigne une norme matricielle subordonnée quelconque.
   (*Indic. :* montrer que la matrice AA_0 est symétrique définie positive, en déduire la localisation de ses valeurs propres)
7. Comment évaluer la vitesse de convergence de la méthode itérative $(*)$?