Licence 3^{e} année, 2015–2016

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Examen du 6 mai 2016

Nombre de pages de l'énoncé : 3 . Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

Soit $\|.\|$ une norme vectorielle et $\|.\|$ la norme matricielle subordonnée.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $b, \delta b \in \mathbb{R}^n$.

1. Donner la définition de $c(A)$, le conditionnement du problème d'inversion de la matrice A pour la norme matricielle $\|.\|$.

2. On considère le système $Ax = b$ et le système perturbé $Ay = b + \delta b$, où $y = x + \delta x$.

   Montrer que l'on a $$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq c(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} .$$

Exercice 1.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Donner un encadrement des valeurs propres de A, sans les calculer directement.

2. Déduire l'existence de la factorisation de Cholesky pour la matrice A.

3. Effectuer la factorisation de Cholesky de A.

Exercice 2.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Soit $b \in \mathbb{R}^3$ quelconque, on s'intéresse à la résolution de $Ax = b$ par méthodes itératives.

1. Déterminer les valeurs propres de A.

2. Pour quelles valeurs de α la matrice est-elle inversible ?
   On supposera dans la suite A inversible.

3. Écrire la matrice de Jacobi $\mathcal{J}$ associée à A. Donner les valeurs de α pour lesquelles la méthode de Jacobi est convergente.

4. Écrire l'équation itérative générale de Jacobi (reliant $x^{(\mathrm{k}+1)}$ et $x^{(\mathrm{k})}$). En déduire l'algorithme dans le cas particulier de la matrice A de cet exercice (*i.e.* exprimer ${x_i}^{(\mathrm{k}+1)}$ pour $1 \leq i \leq 3$).

5. Pour quelles valeurs de α et ω la méthode de relaxation $\mathcal{L}_{rel(\omega)}$ est-elle convergente ?

Exercice 3.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante. On suppose $n \geq 2$.

Partie I

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure inversible.

1. Montrer qu'il existe une matrice inversible D telle que la matrice $\tilde{A} = DA$ soit triangulaire supérieure et n'ayant que des 1 sur la diagonale.

2. On pose $B = I_n - \tilde{A}$. Déterminer le polynôme caractéristique de B et donner $\rho(B)$.

3. Montrer que $B^n = O$.
   (Indic. : on pourra appliquer le théorème de Cayley-Hamilton)

4. Déduire de ce qui précède $\tilde{A}^{-1}$ et ensuite A^{-1}.

Partie II

On considère la matrice carrée réelle $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ définie par $a_{i,i} = 1$ et $a_{i,i+1} = 2$ pour $1 \le i \le n$, tous les autres coefficients a_{ij} étant nuls :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

5. Soit $b \in \mathbb{R}^n$ défini par $b_i = 3$ pour $1 \le i \le n-1$ et $b_n = 1$.
   Trouver x tel que $Ax = b$.
   (Indic. : écrire d'abord le vecteur Ax et en déduire x par identification des coordonnées. Ne PAS utiliser l'inverse A^{-1} !)

6. Soit $\delta b \in \mathbb{R}^n$ défini par $(\delta b)_i = (-1)^{i+1}\varepsilon$, pour $i = 1, \dots, n$ $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, b étant défini dans la question précédente.
   On considère le système $Ay = b + \delta b$, donner un système vérifié par $\delta x = y - x \in \mathbb{R}^n$ et montrer que les coordonnées de δx vérifient $(\delta x)_{n-i} = (-1)^{n-(i-1)}(2^{i+1} - 1)\varepsilon$, $0 \le i \le n-1$.

7. Calculer $\|b\|_\infty$, $\|\delta b\|_\infty$, $\|x\|_\infty$ et $\|\delta x\|_\infty$.

8. Démontrer que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & \cdots & (-2)^{j-1} & \cdots & (-2)^{n-2} & (-2)^{n-1} \\ 0 & 1 & -2 & 4 & \cdots & (-2)^{j-2} & \cdots & (-2)^{n-3} & (-2)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & (-2)^{j-3} & \cdots & (-2)^{n-4} & (-2)^{n-3} \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & 1 & & -2 & 4 \\ 0 & \cdots & & & & 0 & & 1 & -2 \\ 0 & 0 & & \cdots & & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↑ j-ième colonne

(Indic. : On pourra
-> soit utiliser la partie I et déterminer la matrice B et les B^k ;
-> soit résoudre les systèmes $Ax = e_j$, $j = n, n-1, \dots, 1$ où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$)

9. On rappelle que $\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Calculer $c_\infty(A)$.

10. Comparer l'erreur relative en x par rapport à l'erreur relative en b. Commenter.
    Expliciter pour une précision de $\varepsilon = 2^{-20}$ et dimension $n = 40$. Est-ce que ce résultat était prévisible ?