UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3e année, 2012–2013

Méthodes Numériques

Examen du 2 mai 2013

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

Soit $\|.\|$ une norme sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner la définition de la norme matricielle sous-jacente à cette norme vectorielle et que l'on notera aussi $\|.\|$.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\rho(A) \leq \|A\|$,
   où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A.

Exercice 1

Dans cet exercice, on note $\|.\|$ la norme matricielle sous-jacente à une norme vectorielle $\|.\|$ donnée sur $\mathbb{R}^n$ et on note I_n la matrice identité.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A est inversible si $\|I_n - A\| < 1$ et que

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I_n - A\|}$$

(Indic. : poser $B = I_n - A$ et considérer $I_n - B$)

Note : dans toute la suite on suppose $\|I_n - A\| < 1$, c'est-à-dire A inversible.

On considère la suite de matrices définie par

$$X^{(0)} = I_n \,, \qquad X^{(k+1)} = I_n + (I_n - A)X^{(k)} \,, \text{ pour } k \in \mathbb{N} \,.$$

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|X^{(k+1)} - A^{-1}\| \leq \|I_n - A\| \, \|X^{(k)} - A^{-1}\|$.
3. Montrer que

$$\|X^{(k)} - A^{-1}\| \leq \frac{\|I_n - A\|^{k+1}}{1 - \|I_n - A\|}$$

En déduire la limite de la suite de matrices $(X^{(k)})_k$.

On considère maintenant la suite de matrices définie par

$$Y^{(0)} = I_n \ , \qquad Y^{(k+1)} = Y^{(k)}(2I_n - AY^{(k)})\ , \ \text{pour } k \in \mathbb{N}\,.$$

4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Y^{(k)}$ commute avec A.
5. On pose $Z^{(k)} = I_n - AY^{(k)}$, montrer que $Z^{(k+1)} = (Z^{(k)})^2$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Exprimer $Y^{(k)} - A^{-1}$ grâce à $Z^{(k)}$ et montrer que

$$\|Y^{(k)} - A^{-1}\| \leq \frac{\|I_n - A\|^{2^k}}{1 - \|I_n - A\|}$$

   En déduire la limite de la suite de matrices $(Y^{(k)})_k$.

7. Comparer les deux méthodes itératives :
   en termes de vitesse de convergence et en termes de complexité.

8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ 9/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Justifier (brièvement) pourquoi l'on peut appliquer les méthodes précédentes.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

1. Énoncer et appliquer un résultat du cours qui permet d'affirmer que la matrice A admet une décomposition LU.
2. Déterminer une décomposition $A = LU$ où L est triangulaire inférieure avec des “1” sur la diagonale et où U est triangulaire supérieure.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \quad \text{pour } \ t \in [0, T] \\ y(0) &= y_0. \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R})$.
Soit $N \geq 1$. On pose $h = T/N$ et $t_n = nh$ pour $n = 0, \ldots, N$ et on définit une suite de valeurs $\{y_n\}_{n=0,\ldots,N}$ approchant $y(t_n)$ par la méthode suivante

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big[f(t_n, y_n) + f\Big(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)\Big)\Big]$$

Déterminer l'erreur de consistance de ce schéma et en déduire l'ordre du schéma.

(Indic. : en utilisant la régularité de $y(t)$ et $f(t, y)$ appliquer le théorème des accroissements finis et/ou une formule de Taylor.