Licence 3e année, 2016–2017

Méthodes Numériques

Examen du 5 mai 2017

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille n.

Questions de cours

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et $\delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque. On pose $B = A + \delta A$. Dans tout ce qui suit on utilisera la norme matricielle $\|.\|_2$.

1. Donner la définition du conditionnement de A pour le problème de l'inversion de matrices, $c_2(A)$.
   Donner une interprétation de ce nombre.
2. Donner un résultat sur le conditionnement de A pour le problème de détermination des valeurs propres.
3. On définit en Scilab la variable réelle `epsilon=10^(-8)`.
   Écrire les matrices `A` et `B` définies par les commandes Scilab suivantes :
   `A=diag([1:100])`, `dA=epsilon*ones(A)`, `B=A+dA`.
   Calculer $c_2(A)$. Que peut-on dire des valeurs propres de B ?

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

1. Énoncer et appliquer un résultat du cours qui permet d'affirmer que la matrice A admet une décomposition LU.
2. Déterminer une décomposition $A = LU$ où L est triangulaire inférieure avec des "1" sur la diagonale et où U est triangulaire supérieure.

Exercice 2
On note $N(.)$ une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est matricielle, c'est-à-dire compatible avec la multiplication matricielle, mais qui n'est pas induite par une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. Pourquoi la norme de Frobenius est-elle un exemple d'un telle norme $N(.)$? Justifier.
2. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si l'on pose $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_N = N(xu^t)$, l'application $x \longmapsto \|x\|_N$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
3. On note $N'(.)$ la norme induite par $\| \cdot \|_N$, montrer que
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N'(A) \leq N(A).$$
4. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $N'(A)$ pour la norme de Frobenius.

Exercice 3
On note $\|.\|$ la norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ induite par une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$ et l'on note I_n la matrice identité.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|I_n - A\| < 1$.

1. On pose $B = I_n - A$, que peut-on dire de $(I_n - B)^{-1}$?
Déduire que A est inversible et que $\|A^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|I_n - A\|}$.

On considère la suite de matrices définie par
$$X^{(0)} = I_n \ , \qquad X^{(k+1)} = I_n + (I_n - A)X^{(k)} \ , \text{ pour } k \in \mathbb{N} \, .$$

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X^{(k)} - A^{-1} = (I_n - A)(X^{(k-1)} - A^{-1})$.
3. Déduire que
$$\|X^{(k)} - A^{-1}\| \leq \frac{\|I_n - A\|^{k+1}}{1 - \|I_n - A\|}$$
En déduire la limite de la suite de matrices $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.
4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^{(k)}$ est inversible.
Indic. : écrire $X^{(k)}$ sous forme d'un produit de matrices inversibles.

On considère maintenant la suite de matrices définie par
$$Y^{(0)} = I_n \ , \qquad Y^{(k+1)} = 2Y^{(k)} - Y^{(k)}AY^{(k)} \ , \text{ pour } k \in \mathbb{N} \, .$$

5. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Y^{(k)}$ commute avec A.
6. On pose $Z^{(k)} = I_n - AY^{(k)}$, montrer que $(Z^{(k)})^2 = Z^{(k+1)}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
En déduire que $Z^{(k)} = (I_n - A)^{2^k}$.
7. Montrer que
$$\|Y^{(k)} - A^{-1}\| \leq \frac{\|I_n - A\|^{2^k}}{1 - \|I_n - A\|}$$
En déduire la limite de la suite de matrices $(Y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.
8. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Y^{(k)}$ est inversible.
Indic. : écrire $Y^{(k)}$ sous forme d'un produit de matrices inversibles.
9. Comparer les deux méthodes itératives :
en termes de complexité et en termes de vitesse de convergence.