UFR
DE MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE

UNIVERSITÉ
PARIS
DESCARTES

Licence 3$^{\text{e}}$ année, 2017–2018

Méthodes Numériques

Examen du 9 mai 2018

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours Soit $\|.\|$ une norme vectorielle et $\|.\|$ la norme matricielle subordonnée. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $b, \delta b \in \mathbb{R}^n$.

1. Donner la définition de $c(A)$, le conditionnement du problème d'inversion de la matrice A pour la norme matricielle $\|.\|$.

2. On considère le système $Ax = b$ et le système perturbé $Ay = b + \delta b$, où $y = x + \delta x$.

   Montrer que l'on a $$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq c(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\ .$$

Exercice 1.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Donner un encadrement des valeurs propres de A, sans les calculer directement.

2. Déduire l'existence de la factorisation de Cholesky pour la matrice A.

3. Effectuer la factorisation de Cholesky de A.

Exercice 2

Pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix}$.

Soit $b \in \mathbb{R}^3$ quelconque, on s'intéresse à la résolution de $Ax = b$ par méthodes itératives.

1. Pour quelles valeurs de α, β, γ et δ la matrice est-elle inversible ?
   On supposera dans la suite A inversible.

2. Donner des conditions suffisantes sur α, β, γ et δ, pour avoir convergence de la méthode de Jacobi et convergence de la méthode de Gauss-Seidel.

3. Écrire la matrice de Jacobi J associée à A. Calculer ses valeurs propres et en déduire une conditions nécessaire et suffisante de convergence de la méthode de Jacobi.

Exercice 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{R}^n$. Pour $x^{(0)}, y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donnés, on définit

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x^{(\mathrm{k+1})} & = & Ay^{(\mathrm{k})} + a \\ y^{(\mathrm{k+1})} & = & Bx^{(\mathrm{k+1})} + b \end{array} \right. \qquad \text{pour } x^{(0)}, y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

1. Exprimer $x^{(\mathrm{k+1})}$ en fonction de $x^{(\mathrm{k})}$ ainsi que $y^{(\mathrm{k+1})}$ en fonction de $y^{(\mathrm{k})}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence pour chacune des suites. Quelles équations vérifient les limites respectives x^* et y^* ?
3. Montrer que (1) est équivalent à $z^{(\mathrm{k+1})} = Cz^{(\mathrm{k})} + c$ où $C \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
   Expliciter C et $c \in \mathbb{R}^{2n}$.
4. Montrer que $\rho(C) = \rho(BA)$.
   (Indic. : montrer que $\mathrm{spec}(C) = \mathrm{spec}(BA)$*)*

On rappelle que la vitesse de convergence asymptotique d'une méthodé itérative définie par $x^{(\mathrm{k})} = Mx^{(\mathrm{k\text{-}1})} + m$, $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\in \mathbb{R}^{2n}$ est défini par $R(M) = -\log_{10}(\rho(M))$. On pose $e^{(\mathrm{k})} = x^{(\mathrm{k})} - x^*$ l'erreur à l'itération $k \in \mathbb{N}$.

5. Montrer que le nombre d'itérations k pour réduire l'erreur d'un facteur ϵ, *i.e.*, $\|e^{(\mathrm{k})}\| \leq \epsilon \|e^{(0)}\|$ vérifie $k \geq \frac{-\log_{10} \epsilon}{R(M)}$.
6. Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir $\epsilon = 10^{-7}$ si

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$