**Licence 3e année, 2018–2019**

# Méthodes Numériques

# Examen du 2 mai 2019

***Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.***

**Tout document est interdit.**
**Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.**

**Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.**

---

On note dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$

**Questions de cours** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\|.\|$ une norme matricielle

1. Montrer que si $I_n - A$ est non inversible, alors $\|A\| \geq 1$.
2. Montrer que si $\|A\| < 1$, alors $I_n - A$ est inversible et

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k \quad \text{avec} \quad \|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} .$$

**Exercice 1**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, $b \in \mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ une norme matricielle.

1. Pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, on pose $M = I_n - BA$ et on définit une suite de vecteurs $(x^{(\mathrm{k})})_{k\in\mathbb{N}}$ comme suit

$$x^{(\mathrm{k}+1)} = Mx^{(\mathrm{k})} + Bb, \quad \text{pour } k \geq 0$$

Écrire $x^{(\mathrm{k})}$ en fonction de $x^{(0)}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence de cette suite.
Quelle est alors la limite ?

Dans toute la suite on suppose que la matrice $B$ est choisie de façon à avoir $\|I_n - BA\| = \|M\| < 1$.

2. Montrer que $B$ est inversible.
3. Montrer que

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|I_n - BA\|} \quad \text{et} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\|A\|}{1 - \|I_n - BA\|}$$

4. Montrer que

$$\frac{\|B^{-1} - A\|}{\|A\|} \leq \frac{\|I_n - BA\|}{1 - \|I_n - BA\|}$$

**Exercice 2**

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer spec$(A)$.
2. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la matrice $A$ est–elle à diagonale strictement dominante ?
3. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la matrice $A$ est–elle définie positive ?
4. Déterminer la matrice de Jacobi $J$.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha$ pour garantir la convergence de la méthode de Jacobi.
6. Déterminer la matrice de Gauss-Seidel $\mathcal{L}$.

**Exercice 3**

1. Montrer qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible ainsi que toutes ses sous-matrices principales.

On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice tridiagonale et on note

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix},$$

2. Donner les conditions sur les $a_i, b_i$ et $c_i$ pour que $A$ soit à diagonale strictement dominante.
3. Déduire que $A$ admet une décomposition $LU$ unique.

On suppose que $L$ et $U$ sont de la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & & l_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & & & & 0 & l_n & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & v_3 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & & & & 0 & 0 & u_n \end{pmatrix},$$

On note $L_{i,\star}$ la $i^{\text{e}}$-ligne de $L$ et $U_{\star,j}$ la $j^{\text{e}}$-colonne de $U$.

4. Par identification des éléments de la matrice $A$ et de la matrice $LU$, écrire d'abord les éléments $a_i, b_i$ et $c_i$ en fonction des éléments $v_i$, $u_i$ et $l_i$ ($i$ prenant les valeurs adaptées). En déduire un algorithme de décomposition $LU$ pour une matrice tridiagonale.
5. On souhaite résoudre le système linéaire $Ax = y$ où $x, y \in \mathbb{R}^n$. Comme dans le cas général, on se ramène à la résolution de deux systèmes triangulaires.
   Donner les algorithmes de résolution des deux systèmes triangulaires dans ce cas.
6. Déterminer le nombre d'opérations scalaires nécessaires pour résoudre un système tridiagonal $Ax = y$.
   Comparez au coût du cas général.