UFR
DE MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Sciences
Université de Paris

Licence 3$^{\text{e}}$ année, 2020–2021

Méthodes Numériques

Examen du 7 mai 2021

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

On note dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$.

Questions de cours

Soit $\|.\|$ une norme sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner la définition de la norme matricielle induite par cette norme sur $\mathbb{R}^n$ et que l'on notera aussi $\|.\|$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\rho(A) \leq \|A\|$.
   (Indic. : considérer la matrice $M = v\, v^t$, où v est un vecteur propre, bien choisi, de A).

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Donner un encadrement des valeurs propres de A, sans les calculer directement.

2. Déduire l'existence de la factorisation de Cholesky pour la matrice A.

3. Effectuer la factorisation de Cholesky de A.

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $v \in \mathbb{R}^n$ non nul et $\beta = 2/(v^t\, v) = 2/\|v\|_2^2$, on définit $H_v = I_n - \beta v v^t \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que H_v est une matrice symétrique et que $H_v^t\, H_v = I_n$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on suppose que $\alpha^2 = x_k^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$, $1 \leq k \leq n$, $\alpha > 0$.
   Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $v_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, k-1$, $v_k = x_k + \alpha$, et $v_i = x_i$ pour $i = k+1, \ldots, n$.

   Calculer $\|v\|_2^2$ et $v^t x$. En déduire $H_v x$. Donner les coordonnées $(H_v x)_i,\ i = 1, \ldots, n$.

   Expliciter les cas $k = 1$, $k = n-1$ et $k = n$.
   Commenter l'action de la matrice H_v sur le vecteur x.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A = [A_1\, A_2\, \cdots\, A_n]$ où $A_j \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq n$, est la j ecolonne de A.

3. Construire une matrice $H_1 = H_{v_1}$ avec v_1 choisi de façon à ce que tous les éléments (sauf le premier) de la première colonne de $H_1 A$ soient nuls.

4. Expliquer comment en déduire un algorithme pour mettre A sous forme triangulaire supérieure.

5. Évaluer le coût de cette méthode.

Exercice 3
Soit A une matrice réelle carrée de taille $n \geq 2$ et $b \in \mathbb{R}^n$.
On suppose qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x^t\, Ax \geq \nu \|x\|_2^2 .$$

1. Que entraîne cette propriété pour $x \in \ker(A)$? Déduire que A est inversible.

Pour $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, on définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$r^{(\mathrm{k})} = Ax^{(\mathrm{k})} - b\ , \quad x^{(\mathrm{k+1})} = x^{(\mathrm{k})} - \theta r^{(\mathrm{k})}\ .$$

2. Si la suite de vecteurs $(x^{(\mathrm{k})})_{k\in\mathbb{N}}$ admet une limite $x^\star$,
   que vérifie alors $x^\star$? Que vaut $\lim\limits_{k\to+\infty} r^{(\mathrm{k})}$?

3. Exprimer $r^{(\mathrm{k})}$ grâce à $r^{(\mathrm{k-1})}$ et en déduire par récurrence simple une relation entre $r^{(\mathrm{k})}$ et $r^{(0)}$.

4. Déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(\mathrm{k})} = x^\star$ si et seulement si $\rho(I_n - \theta A) < 1$.

5. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u\|_2 = 1$. Développer l'expression

   $$\|(I_n - \theta A)u\|_2^2 =< (I_n - \theta A)u\, , (I_n - \theta A)u > .$$

   Déduire une majoration de $\|(I_n - \theta A)u\|_2^2$ indépendante de u.

6. Déduire de ce qui précède que $\|(I_n - \theta A)\|_2 < 1$ pour $\theta \in \left]0, \dfrac{2\nu}{\|A\|_2^2}\right[$.

7. Conclure sur la convergence de la suite $(x^{(\mathrm{k})})_{k\in\mathbb{N}}$.